Вестник
Рязанского
государственного
университета
имени *С.А. Есенина*

ISSN 0869-6446

Научный журнал
2009 № 1/21

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»

Журнал выходит с 1993 года

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПЕДАГОГИКА

А.П. Лиферов

ТРАНСФОРМАЦИЯ ТРАДИЦИОННОЙ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ В УСЛОВИЯХ ПОСТИНДУСТРИАЛЬНОГО ОБЩЕСТВА

В статье на примере отечественных и зарубежных вузов рассмотрены основные пути и формы их трансформации в соответствии с задачами становления постиндустриального общества и формирующегося глобального рынка рабочей силы. Анализируются возможные пути взаимодействия традиционных университетов и быстро прогрессирующих образовательных бизнес-структур.

когнитивные компетенции, корпоративное образование, междисциплинарные программы, некогнитивные компетенции, трансформация традиционной высшей школы.

Под влиянием формирующегося глобального рынка труда природа традиционного высшего образования, хотя и медленно, но все же претерпевает существенные изменения. На Западе отныне оно становится все более предпринимательством со всеми вытекающими последствиями. Университеты под воздействием рыночных факторов сами постепенно превращаются в экономические корпорации, связанные с производством и распространением товара особого рода – знаний. Как метко заметил Н. Покровский, «отныне университет из храма науки превращается в market place в самом широком смысле этого понятия» [1]. В результате в ряде стран существенно растет удельный вес финансирования университетских исследований промышленными корпорациями. Например, в Канаде, Бельгии, Венгрии и Германии он достигает 8–14 процентов, в Корее, Турции – 15–23 процентов, а в стремительно развивающемся Китае – доходит до 37 процентов [2]. Меняется и стратификация университетских преподавателей. Лидерами в университетском сообществе становятся те из них, кто любыми способами (иногда совсем несвойственными прежним академическим) мобилизуют

---

[1] Покровский Н.Е. Побочный продукт глобализации: университеты перед лицом радикальных изменений // Общественные науки и современность. 2005. № 4. С. 148.

[2] Гохберг Л., Китова Г., Кузнецова Т. Стратегия интеграционных процессов в сфере науки и образования // Вопросы экономики. 2008. № 7. С. 127.

грантовую поддержку со стороны различных фондов и предпринимательских кругов, привлекают массы студентов, постоянно работают над своим персональным брендом на рынке, включая престижные премии и т.п. Ныне в рамках университета успешным считается тот, кто не только может производить новые знания, но и владеет необходимыми навыками их реализации на рынке. Это предполагает, что современный вузовский педагог должен обладать хотя бы минимальными менеджерскими данными, что, безусловно, в значительной мере оправдывает категоричность в подходах к оценке эффективности деятельности преподавателей, проявляемую, например, П. Лоранжем: «Преподаватели, не способные помочь генерировать денежные потоки, школе бизнеса не нужны» [1]. Известный специалист в области образовательной политики, профессор Лондонского университета Рональд Барнетт, еще 10 лет назад в инаугурационной профессорской лекции так определил сложный, многоликий характер трансформации сегодняшнего университетского сообщества: «Современный университет может обойтись без полемики о «знании» и «истине». И обходится. Он вообще не нуждается ни в легитимации, ни в идеологии. И если можно помыслить идеологию современного университета, то она выражается тезисом «о реализации своих возможностей» [2]. И далее утверждает: «Придется отбросить понятия «знания» и «истины». Как те знамена, под которыми всегда проводилось научное исследование. Теперь его следует рассматривать скорее как эмансипацию неопределенности и помощь в адаптации к ней. «Передача технологий», «действенное исследование», «консалтинг», «патентирование», «грант» – все эти термины напоминают нам о расширяющемся и все более неопределенном диапазоне исследований в современном мире. Категория «исследователь» потеряла свою четкость [3].

Возникают и новые роли обучающихся (студентов, магистров, аспирантов), выступающих в этих условиях в качестве клиентов корпорации, покупателей на рынке образовательных услуг, предлагаемых университетами [4]. Однако далеко не все на Западе безусловно одобряют тенденцию все более широкого внедрения в университетскую среду элементов конкурентного поведения. В частности, в США усиление рыночной конкуренции уже привело к заметному росту стоимости обучения. Например, среднегодовые расходы, связанные с обучением в частном четырехгодичном колледже университета, в 2004 году достигали 32,9 тысячи долларов, тогда как в 1985 году они были в три раза меньше [5]. Но, самое главное, этот процесс не обязательно означает повышение эффективности подготовки специалистов или научных исследований. По мнению ряда авторов, «скорее следует говорить о снижении стандартов преподавания или

[1] Лоранж П. Новый взгляд на управленческое образование: задачи руководителей. М. : Олимп-Бизнес, 2004. С. 69.

[2] Барнетт Р. Осмысление университета // Alma mater. 2008. № 6. С. 48.

[3] Там же.

[4] Weber L.E. Survey of the Main Challenges Facing Higher Education // Challenges Facing Higher Education at the Millenniums. Phoenix, 1999.

[5] Супян В.Б. Наука и образование в США: главные приоритеты развития в «экономике знаний» // США – Канада: экономика, политика, культура. 2008. № 6. С. 32.

качества
и глубины исследований» [1].

Фундаментальная наука и образование тесно связаны друг с другом. И как справедливо заметил С.П. Капица, «они должны поддерживаться государством и управляться обществом, где длительные приоритеты определяются социальным заказом, а не только рынком с его критерием быстрой эффективности. Эти соображения приводят к трудностям реализации рыночных законов в этих областях при управлении на основе краткосрочных монетаристских механизмов, и эти противоречия в современном мире только обостряются» [2].

Университет как корпорация активно использует также ресурс связи с местным сообществом. Местные сообщества со своей разветвленной структурой могут становиться либо важным союзником университета, либо быть его серьезным противником. Развитые страны мира накопили богатый опыт динамичного и гибкого социального партнерства в сфере образования на всех ступенях. На низовом уровне в качестве основных факторов такого партнерства выступают конкретные образовательные учреждения, местные предприятия, этнические, религиозные или возрастные группы населения, специалисты различных государственных служб и активисты общественных организаций. Партнерство касается подготовки и осуществления отдельных внеучебных мероприятий, координации усилий в деле оснащения и ремонта учебных помещений, оказания реальной помощи студенческим семьям и т.п. На муниципальном уровне также совместно решаются сугубо практические вопросы, в частности, о предоставлении информации о трудоустройстве и др. На региональном или федеральном уровне социальное партнерство охватывает более широкий спектр вопросов, а именно: выработку согласованной образовательной политики, разработку принципов реформы заработной платы, формирование государственных образовательных стандартов и перспективных программ развития системы образования и ее отдельных сегментов. В странах Европейского союза, например, на национальном и региональном уровнях действует целая сеть различных агентств, специализирующихся на консультировании в сфере социального партнерства [3].

В целом на Западе достаточно давно сложились во многом эффективные формы социального взаимодействия в виде различных фондов по поддержке программ образовательной профессиональной подготовки и переподготовки, средств федеральных и региональных бюджетов, а также взносов частных компаний. При этом роль государства как социального партнера не сводится только к использованию его финансового, организационно-административного или законодательного ресурсов, а «состоит еще и в использовании широкого спектра мер по активи-

[1] Экономика образования. 2008. № 2. С. 86.

[2] Наука и технология в России // Международная газета. 2007. № 4/86 ; 2008. № 1/87.

[3] Партнерство в сфере профессионального образования: анализ социальных практик // Высшее образование в России. 2008. № 4. С. 63–65.

зации других социальных партнеров и стимулированию социальной ответственности каждого гражданина за повышение своего образовательного уровня» [1].

«В результате всех этих трансформаций традиционное понимание академических ценностей, связанное с идеей служения университетов и науки обществу, придется приспосабливать к новому контексту, в котором общественное уже не обязательно важнее личного» [2]. Необходимость преодоления этого противоречия Р. Барнетт выдвигает как одно из условий успешного переустройства университетской жизни: «...в современном университете существует фундаментальное противоречие между прагматическими стремлениями и идеальным смыслом, иначе говоря, между аппаратом управления и профессурой. Невозможно одновременно руководствоваться утилитарными целями, решительно обеспечивать выполнение всех управленческих задач и при этом не ограничивать ничьих научных интересов. Внутреннее состояние университета характеризуется постоянными столкновениями этих двух пластов университетской жизни, что приводит к неизбежным глубоким потрясениям» [3]. И далее, развивая эту мысль, замечает: «В сверхсложном мире необходимы ученые со смелым самосознанием, те, кто готов сотрудничать с политиками и государственными чиновниками, кто способен вжиться в их дискурсы и говорить на понятном им языке. Тогда ученые начнут жить в реальном повседневном мире, они станут в нем своего рода коммутатором» [4].

Все основополагающие проблемы развития высшего образования на современном этапе предполагается еще раз обсудить на Всемирной конференции по высшему образованию, которая пройдет в Париже в июле 2009 года. Она станет своеобразным подготовительным этапом перед IV Всемирным научным форумом, который запланирован на ноябрь 2009 года в Будапеште.

Приведенные выше точки зрения на судьбу традиционных университетов вряд ли можно считать общепризнанными. Более того, необходимо привести и прямо противоположные взгляды на эту проблему. К числу их выразителей, например, можно отнести американских социологов Дэвида Фрэнка (Калифорнийский университет) и Джона Майера (Стенфордский университет), которые в своей совместной работе «Экспансия университетов и общество знания» рассматривают феномен расцвета университетского образования в контексте представлений о формирующемся обществе знания. Их внимание привлекли, в частности, две противоположные тенденции. С одной стороны, «присущий модерну процесс социальной дифференциации нередко ассоциируется с нарастающими потребностями в специализированном знании и образовании, которые угрожают выживанию университетов. С другой стороны, модерн способствует развитию интегрированной системы знания» [5]. Однако, по мнению авторов, несмотря на все трудности

---

[1] Лебедева Л.Ф. Социальное партнерство в глобальной экономике знаний: мировые тенденции и национальные особенности. С. 294.

[2] Экономика образования. 2005. № 5. С. 137.

[3] Барнетт Р. Осмысление университета. С. 50.

[4] Там же. С. 54.

[5] Социальные и гуманитарные науки. Отечественная и зарубежная литература // Реферативный журнал. Сер. 11, Социология. 2008. № 4. С. 114.

и вызовы, университеты продолжают функционировать и развиваться. Более того, масштабы и динамику их развития они характеризуют как экспансию и следующим образом раскрывают ее содержание на протяжении последних 60 лет:

1. Наблюдается экспоненциальный рост количества университетов, которые появились практически во всех государствах, включая самые бедные и малонаселенные.

2. Происходит не менее масштабный рост числа студентов (более 100 миллионов человек в 2000 году), которые теперь представляют не только элитарные группы индустриально развитых стран, как было в начале прошлого века, но и периферийные страны, причем если прежде женщины были почти полностью исключены из процесса университетского обучения, то сейчас именно женщины составляют основную долю в общем приросте количества студентов [1].

3. Резко увеличивается не только число самих университетов, но и их факультетов, учебных программ и специальностей, появляются все новые области знания, становящиеся объектом преподавания и исследовательской работы. Значительно усиливается роль социально-гуманитарной компоненты учебных программ, а специализации в таких областях, как социология, психология, политология, экономика, имеются теперь почти в каждом университете.

4. Показатели экономического развития и социальной дифференциации перестают играть решающую роль с точки зрения доступа к образованию и количества университетов в той или иной стране.

5. Происходят структурные изменения, сопровождающиеся значительным ростом административного аппарата университетов, созданием новых рабочих мест в сферах управления и обслуживания, не связанных непосредственно с процессом преподавания [2].

В представлении Д.И. Фрэнка и И.В. Майера, ключевым моментом в понимании растущей социальной роли традиционных университетов является то, что знание апеллирует к универсальным принципам. В глобализованном и индивидуализированном обществе университетскому образованию будет принадлежать центральная роль как в производстве знания, так и в наращивании человеческого потенциала, которые в совокупности и должны обеспечить новое качество социального развития. Ряд специалистов считают, что университеты станут своеобразным «стержнем, вокруг которого структурируется общество знания» [3].

Затрагивая в очередной раз будущее взаимоотношений традиционных университетов и корпоративных образовательных учреждений, на наш взгляд, не следует ожидать «битвы на уничтожение», поскольку такой сценарий не является продуктивным ни для одной из сторон. Скорее всего, будет происходить их дальнейшее более тесное сближение, когда значительная часть вузовских

---

[1] В 2006 году в мире насчитывалось 97 миллионов студентов. По прогнозам, к 2025 году их количество достигнет 260 миллионов человек. В Европе и в России в высших учебных заведениях продолжают обучение около 20 процентов выпускников средних школ. В США разными формами образования после окончания школы охвачено до 40 процентов молодежи.

[2] . Frank D.I., Meyer I.W. University expansion and the Knowledge society // Theory and society. Avenel (N.I.), 2007. Vol. 36, № 4. P. 289–290.

[3] Там же.

подразделений, преподавателей и исследователей будет вовлекаться корпорациями в решение стратегических и оперативных производственных задач [1] с вложением в традиционные университеты все больших средств. Но вряд ли следует ожидать полной трансформации традиционной университетской подготовки под цели транснациональных корпораций. Наиболее вероятный путь – это своеобразное «разделение труда», когда за прежними образовательными структурами останется фундаментальная подготовка (при известном и неизбежном вторжении в их жизнь элементов рынка), а за корпоративными университетами и другими формами внутрифирменного обучения – «заточка» кадров под цели и требования конкретной компании.

Мы вполне разделяем мнение о том, что традиционные университеты, пройдя определенный путь модернизации, останутся решающим фактором общественного прогресса. Именно такой является идеология большинства проектов социально-экономического развития стран Европейского союза. В вышедшей уже более четверти века назад коллективной работе западных специалистов под названием «Университет будущего (части прогностического исследования «План Европы 2000 года»)» авторы исходили из идеи, что в постиндустриальном обществе решающую социальную роль станут играть не промышленно-финансовые корпорации, а научные и образовательные институты. В XXI веке, по их мнению, высшая школа станет экспериментальным полем, где будут складываться и испытываться новые формы организации общества [2]. Представляется, что образование должно оставаться тем общественным институтом, который в решающей степени будет формировать интеллектуальный, культурный и морально-нравственный потенциал будущего, а не просто обслуживать сиюминутные потребности сегодняшних финансово-экономических столпов общества.

В этих условиях, как считают отечественные исследователи В. Мау и А. Сеферян, бизнес-образование становится промежуточным звеном, связывающим традиционную образовательную сферу и практическую хозяйственную деятельность. «Высшее образование поставляет школам бизнеса ресурсы (готовит потенциальных абитуриентов школ бизнеса), бизнес является «потребителем» готовой продукции бизнес-школ… Влияние высшего образования на развитие бизнес-образования достаточно очевидно. Чем больше выпускников университетов, тем больше потенциальная кадровая база для бизнес-образования и соответственно больше спрос на его услуги» [3]. Такую зависимость, в частности, подтвердили исследования американских специалистов, выявивших, что рост на 1 процент числа выпускников университетов первого высшего образова-

---

[1] И все же подобное сближение вряд ли стоит оценивать только позитивно прежде всего в отношении традиционных типов образовательных учреждений. Ведь очевидно проявляющуюся линию на снижение фундаментальности, общекультурной подготовки специалистов в классических университетах, безусловно, следует отнести в отрицательный баланс взаимодействия традиционных и бизнес-образовательных структур.

[2] La resurgence des accords economiguca regionaux // Problemes econ. 1992. 11 juin. (№ 2279).

[3] Мау В., Сеферян А. Бизнес-образование рубежа веков: вызовы времени и тенденции развития // Вопросы экономики. 2007. № 10. С. 81.

ния приводит через два года к росту числа выпускников школ бизнеса на 0,9 процента.

Вполне понятно, что без базовых знаний не могут успешно развиваться соответствующие системы подготовки и переподготовки кадров, проводиться прикладные исследования и разработки. Качественно выполнять такую работу способны только традиционные университеты. В то же время становится все очевиднее, что бизнес-образование в лице тех же корпоративных университетов оказывает все возрастающее влияние на классические университеты с целью их большей практической нацеленности в своей деятельности, к более тщательному учету объективных потребностей современного рынка труда.

Понимание возросшей значимости практической составляющей в своей подготовке приходит и в среду студентов, обучающихся в современных университетах. Так, независимое агентство «РейтОР» в 2005 году провело исследование среди выпускников российских вузов для выявления, насколько востребованы на рабочем месте когнитивные (непосредственно связанные с процессом познания и обучения) и некогнитивные (общительность, умение управлять людьми и т.п.) компетенции. На основе девятнадцати исходных компетенций было осуществлено сравнение когнитивных и некогнитивных компетенций по коэффициентам значимости (в данном случае коэффициент значимости – это среднее значение по всем компетенциям, входящим в группу). В результате было выявлено, что коэффициент значимости для некогнитивных характеристик оказался выше соответствующего коэффициента по когнитивным компетенциям [1]. Этот факт еще раз подтверждает тезис о том, что в современных условиях знания в определенной области важны не только сами по себе, но и в силу того, что они становятся своеобразным фундаментом для развития у человека столь необходимых в современном производстве аналитических способностей, коммуникабельности, склонности к управлению.

Возрастающая корпоративная природа нового университетского образования касается не только проблем управления вузами, но и затрагивает вопросы формирования конкретных учебных программ и воздействия на учебный процесс. Междисциплинарность (Multidisciplinary and Interdisciplinary) – два самых популярных понятия, используемые, например, в американских университетах в условиях современности. Они означают, что сегодня практически ни одна традиционная дисциплина в чистом ее виде не устраивает обучающегося. Все большим спросом пользуются новые образовательные продукты, гибриды, которые в любом варианте непременно должны содержать компонент бизнес-образования и навыки менеджмента. Кроме того, наблюдается все более выраженная «профессионализация» традиционного неспециализированного высшего образования, что в реальности означает отказ от интеллектуально-гражданской направленности обучения и от развития мыслительного потенциала в пользу приобретения прикладных навыков, которые обычно сугубо конкретно понимаются как навыки, полезные для получения работы. Университетское образова-

[1] Быданова Е. Анализ компетенций выпускников российских вузов // Вопросы экономики. 2007. № 6. С. 157.

ние оценивается теперь по его внешним признакам, таким, как возможность трудоустройства или высокий заработок выпускников. Выделяя подобную тенденцию в современной университетской жизни, М. Тлостанова замечает, что вузы сегодняшнего дня получают возможность оставаться «центрами профессионального и технического обучения, но никак не критического мышления, политической или общественной активности» [1].

Многие традиционные естественнонаучные, медицинские или инженерные специальности все теснее соединяются с конкретными обществоведческими, образуя своеобразные единые образовательные программы. Это не исключает, а скорее предполагает, что в недалеком будущем факультеты и кафедры как основные вузовские структурные единицы начнут отмирать, уступая место динамичным междисциплинарным программам, опирающимся не на постоянный, а на меняющийся в зависимости от задач программ состав профессоров. В конечном итоге университеты будут всемерно стремиться освободиться от гарантий и обязательств перед штатным составом профессоров и преподавателей, приглашая их к реализации временных междисциплинарных программ. Это будет уже новый тип профессоров, умеющих свободно перестраивать свои программы, владеющих знаниями в нескольких смежных областях.

Очевидно, снижение при этом значимости системной фундаментальности знания пытаются заменить сохранением небольшой части подразделений и профессоров, отвечающих традиционным требованиям и не приносящим доходов университетской корпорации. Необходимость в них объясняется сохранением за университетами роли ведущих центров экспертиз по тем или иным чисто научным проблемам. Однако, по нашему мнению, это будет лишь точечный вариант сохранения чистой науки.

Упомянутые тенденции в развитии высшего образования на Западе породили радикальные взгляды на его будущее. Выразителями подобных взглядов выступают такие крупные специалисты в этой области, как П. Друкер. Именно он утверждает, что традиционным университетам не выжить, что будущее находится за границами студенческих городков, за границей студенческих аудиторий. Примерно такой же позиции придерживаются футуристы Стэн Дэвис и Джим Боткин. Технологии революционизируют образование, в то время как традиционные учебные институты, такие, как университеты и различные бизнес-школы, пока еще спокойно взирают на то, как новички все активнее диктуют моду в этой сфере. К ним еще не пришло полное понимание того, что больше не существует жестких границ между учебой, работой и жизнью, что это есть один неразрывный процесс. И оценивать новые тенденции невозможно по принципу «нравится – не нравится». Речь идет о новых объективных параметрах системы, которая перенастраивается в условиях глобализации и постиндустриального общества.

Эти постулаты нашли свое закрепление и в документах саммита «Большой восьмерки» в Санкт-Петербурге, где, в частности, говорится: «Университеты

[1] Тлостанова М. Судьба университета в эпоху глобализации // Знание. Понимание. Умение. 2005. № 3. С. 182.

и другие высшие учебные заведения призваны сыграть ключевую роль в обеспечении образования населения в инновационных обществах. Они должны уметь быстро адаптироваться к меняющимся потребностям общества и рынка труда на основе эффективного и прозрачного регулирования» [1].

Образование и наука безоговорочно стали основным катализатором роста мировой экономики. Игнорировать этот всеобщий тренд уже невозможно. Необходимо искать наиболее эффективные способы приобщения к нему. В этом отношении нелишним будет использовать опыт трансформации западных университетов в условиях инновационного общества. Так, правительство США с развитием экономики знаний приступило к разработке и реализации политики, которая еще в большей мере подталкивает университеты и научные лаборатории к усилению их положительного воздействия на экономическое развитие страны. Конечно, формы такого влияния различны, но в наиболее общем виде они могут быть сгруппированы в следующие направления:

1. Университеты создают базы данных, которыми через Интернет могут воспользоваться представители бизнес-структур и промышленности для проведения анализа рынков и экономических трендов. Некоторые из таких баз данных могут стать основой для принятия компаниями инвестиционных решений [2].

2. Университеты проводят экономические и технологические исследования для местных фирм, помогая им разрабатывать новую продукцию или бизнес-стратегии, например Университет штата Висконсин [3].

3. Университеты оказывают непосредственную помощь представителям бизнеса или муниципалитетов путем консультирования, составления бизнес-планов или участия в разработке стратегий муниципального развития.

4. Университеты осуществляют программы по передаче патентов на свои изобретения частным фирмам.

5. Студентов направляют для стажировок в частные фирмы, где они получают либо плату за свой труд, либо дополнительные баллы, которые учитываются в образовательном процессе. Для фирм в свою очередь открывается дополнительный источник квалифицированной и относительно дешевой рабочей силы.

6. Университеты реализуют программы сотрудничества профессоров с частными фирмами для оказания помощи в проведении сложных исследований и экспериментов, например, в сфере инженерии.

7. При университетах создаются технологические парки и инкубаторы, которые способствуют проведению исследований на частных предприятиях, внедрению изобретений и созданию новых рабочих мест.

8. Университеты вступают в частные и государственные партнерства с целью содействия региональному развитию, например, образуют партнерства со школьными округами с целью повышения уровня среднего образования.

---

[1] Высшее образование сегодня. 2006. № 8. С. 32.
[2] URL : http://www.origins.ou.edu/
[3] URL : http://www.uwex.edu/ces/cnred//

9. Университеты сотрудничают с региональными фирмами и организациями, проводят совместные мероприятия либо исследования, помогают находить источники финансирования (в частности, гранты).

10. Университеты участвуют в составлении программ переподготовки и повышения квалификации кадров для частного бизнеса [1].

Непосредственно для современных вузов углубление взаимосвязей с бизнес-средой оборачивается новыми крупными вложениями корпораций в инфраструктуру университетов. Яркими примерами такого государственно-частного сотрудничества могут служить некоторые университеты и колледжи Великобритании, где в конце 2006 года было реализовано 166 совместных с различными фирмами проектов на общую сумму 5 миллиардов фунтов стерлингов. Примерно пятая часть таких проектов была связана со строительством и эксплуатацией стадионов, студенческих общежитий и т.п. Самый крупный из них (190 миллионов фунтов стерлингов) был реализован в университете графства Хартфордшир [2].

Следует, однако, заметить, что производство и рынок не исчерпывают всей гаммы человеческих интересов. Человек всегда будет стремиться заглянуть в свое будущее, в свое космическое окружение, в нем всегда будет присутствовать желание глубже познать окружающий его мир. Технологическим революциям, как правило, сопутствуют революции культурные, в осуществлении которых решающая роль по-прежнему будет принадлежать традиционным университетам и их научным школам.

Транснациональные корпорации сегодня – это форма реализации конкурентной борьбы за рынки, соответствующая определенному этапу развития мировой экономики. Они «мотор» современной мировой глобализации, но не на все времена и не единственная и идеальная модель. Мир всегда готов вступить в новый этап своего общественно-экономического развития. С наступлением каждого такого этапа будут возникать иные формы конкурентной борьбы, а вместе с ними будут меняться и требования к качеству рабочей силы, методам ее подготовки и переподготовки. В условиях смены этапов развития нынешние бизнес-образовательные структуры, в том числе и корпоративные университеты, будут вынуждены либо существенным образом трансформироваться под новые требования, либо исчезнут вовсе. Спрос же на подготовку кадров в различных масштабах и направлениях в традиционных университетах будет всегда, равно как и спрос на фундаментальное знание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барнетт, Р. Осмысление университета // Alma mater. – 2008. – № 6.

[1] По данным исследования Кристофера Шоува, исполнительного директора и декана Западного института Государственного университета Западного Миссури [15].

[2] Ларок Н. Частное финансирование инфраструктуры государственных вузов // Экономика образования. 2008. № 1. С. 92

2. Быданова, Е. Анализ компетенций выпускников российских вузов // Вопросы экономики. – 2007. – № 6.
3. Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8.
4. Гохберг, Л. Стратегия интеграционных процессов в сфере науки и образования / Л. Гохберг, Г. Китова, Т. Кузнецова // Вопросы экономики. – 2008. – № 7.
5. Купцов, В.И. Ценностные ориентации в современном высшем образовании // Диалоги культур и партнерство цивилизаций : 8-е Междунар. Лихачевские науч. чтения, 22–23 мая 2008 года. – СПб., 2008.
6. Ларок, Н. Частное финансирование инфраструктуры государственных вузов // Экономика образования. – 2008. – № 1.
7. Лоранж, П. Новый взгляд на управленческое образование: задачи руководителей. – М. : Олимп-Бизнес, 2004.
8. Мау, В. Бизнес-образование рубежа веков: вызовы времени и тенденции развития / В. Мау, А. Сеферян // Вопросы экономики. – 2007. – № 10.
9. Наука и технология в России // Международная газета. – 2007. – № 4/86 ; 2008. – № 1/87.
10. Партнерство в сфере профессионального образования: анализ социальных практик // Высшее образование в России. – 2008. – № 4.
11. Покровский, Н.Е. Побочный продукт глобализации: университеты перед лицом радикальных изменений // Общественные науки и современность. – 2005. – № 4.
12. Социальные и гуманитарные науки. Отечественная и зарубежная литература // Реферативный журнал. – Сер. 11, Социология. – 2008. – № 4.
13. Супян, В.Б. Наука и образование в США: главные приоритеты развития в «экономике знаний» // США – Канада: экономика, политика, культура. – 2008. – № 6.
14. Тлостанова, М. Судьба университета в эпоху глобализации // Знание. Понимание. Умение. – 2005. – № 3.
15. Шоув, К. Экономическое развитие регионов как функция американских университетов // США – Канада: экономика, политика, культура. – 2008. – № 3.
16. Экономика образования. – 2005. – № 5 ; 2008. – № 2.
17. Frank, D.I. University expansion and the Knowledge society / D.I. Frank, I.W. Meyer // Theory and society. – Avenel (N.I.), 2007. – Vol. 36, № 4.
18. La resurgence des accords economiguca regionaux // Problemes econ. – 1992. – 11 juin. (№ 2279).
19. Weber, L.E. Survey of the Main Challenges Facing Higher Education // Challenges Facing Higher Education at the Millenniums. – Phoenix, 1999.

Л.К. Гребенкина, Н.А. Копылова

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ИДЕИ ПЕДАГОГИКИ СОТРУДНИЧЕСТВА КАК ОСНОВА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ И СТУДЕНТОВ ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ

В статье изложены основы педагогики сотрудничества как одного из современных гуманистических направлений педагогической науки. Раскрыты принципы, методологические подходы и концептуальные идеи, пути и средства ее реализации в высшей школе. Обобщен опыт реализации принципов и идей педагогики сотрудничества на занятиях по педагогическим курсам и английскому языку в Рязанском государственном университете имени С.А. Есенина.

педагогика сотрудничества, сотрудничество, взаимодействие, сотворчество, гуманно-личностный подход, гуманизация, педагог-новатор, коллективная творческая деятельность.

Педагогика сотрудничества как новое направление педагогической науки появилась в 80-е годы XX века, в самом начале перестроечных процессов, как обобщение научных взглядов и опыта педагогов и психологов отечественной и зарубежной школы (К.Д. Ушинский, Н.П. Пирогов, Л.Н. Толстой, С.Т. Шацкий, В.А. Сухомлинский, А.С. Макаренко, Ж.-Ж. Руссо, Я. Корчак, К. Роджерс, Э. Берн и др.). Она породила многочисленные инновационные процессы в образовании, воспитании и развитии учащихся, вызвала общественный резонанс и стремление обновить школу, содержание, традиционные формы и методы обучения и воспитания, предложила обоснование идей гуманизма, характеризующих школу, и как одну из главных ее составляющих – сотрудничество взрослых и детей. Инициаторами научного поиска в этом направлении явились педагоги-новаторы из разных регионов и городов Советского Союза (Ш.А. Амонашвили, И.П. Волков, Т.И. Гончарова, И.П. Иванов, Е.Н. Ильин, В.А. Караковский, С.Н. Лысенкова, Б.П. Никитин, Л.А. Никитина, В.Ф. Шаталов, М.П. Щетинин и др.). Помощниками в осмыслении и пропагандистами их инновационных идей стали известные публицисты В.Ф. Матвеев и С.Л. Соловейчик.

Следует отметить, что концептуальные идеи педагогики сотрудничества в 80-е годы XX столетия разрабатывались учителями-практиками, преподававшими различные предметы в разных образовательных учреждениях и в разных условиях. Как научно-теоретическое направление, оно стало оформляться после ряда встреч в подмосковном поселке Переделкино (сентябрь 1986 г.), поселке Цинандали (сентябрь 1987 г.), городе Москве (март 1988 г.), в Краснодарском крае (сентябрь 1988 г.). В это же время было заявлено, что данное направление представляет собой совместную развивающую деятельность взрослых и детей, скрепленную взаимопониманием, проникновением в духовный мир друг друга, совместным анализом хода и результатов этой деятельности. Педагогика сотрудничества – это открытая программа, ее смысл – в творчестве всех учителей, она живет, пока развивается, дополняется, уточняется и обогащается.

Основные взгляды педагогов-новаторов были отражены в серии статей «Учительской газеты», посвященных их встречам [1]. Как отмечает Г.К. Селев-

[1] Войдем в новую школу // Учительская газета. 1988. 18 окт. ; Демократизация личности // Там же. 1987. 17 окт. ; Методика обновления // Там же. 1988. 19 март. ; Педагогика сотрудничества // Там же. 1986. 18 март.

ко, концепция технологии педагогики сотрудничества первоначально публиковалась в виде тезисов-идей (манифестов): «педагогика сотрудничества», «демократизация личности», «методика обновления», «войдем в новую школу», «поворот», «от ученика к личности», «человек свободный». Например, манифест «Методика обновления» включал идеи «воодушевляющего управления», «гармонизации и гуманитаризации», «реализма целей воспитания», «совместной жизнедеятельности детей и взрослых», «самоопределения», «личностной направленности воспитания», «добровольности», «коллективной направленности» [1].

Цель педагогического процесса, считают педагоги-новаторы, – гармоничное развитие личности ребенка, а сотрудничество – главная категория обучения и воспитания, где воспитатели и воспитанники являются равноправными субъектами учебно-воспитательного процесса, имеющие свободу и равные условия выбора. Первая задача школы, по их мнению, – развить ребенка, чтобы он сам, без принуждения, мог и хотел добывать (а не получать!) знания, приобретать умения и навыки, развивать способности. Они подчеркивали, что педагогика сотрудничества предполагает личностный подход, что проявляется в принятии каждого ребенка как ценности, в знании и учете личностных качеств ученика, который на каждом уроке получает оценку своего труда за активность и инициативу, любознательность и творчество, выбирает задачи по своим способностям, убеждается, что его ценят. Так, например, суть гуманно-личностного подхода (по Е.Н. Ильину) – это любить, понимать, принимать, сострадать, поддерживать и помогать [2].

В работах педагогов-новаторов большое место уделяется деятельности учителя-воспитателя, задача которого состоит в том, чтобы уметь слушать ребенка, вести с ним диалог, понять его интересы и помочь правильно, с научной точки зрения осознать их, учить понимать и выражать себя, помогать состояться как личность. На уроках педагог стремится научить каждого школьника, ориентирует их на успех, способствует организации гуманистических отношений, сотворчества, учится сам и учится у своих учеников, а не копирует уроки других. Отсюда важная составляющая педагогического процесса, основанного на сотрудничестве – это самообразование и саморазвитие учителя. Содержание и методы работы педагогов-новаторов подчинены одной общей цели: воспитание, обучение и развитие детей на основе принципов гуманизма.

Педагогика сотрудничества – это не только сотрудничество учителей с детьми и коллегами, но и с родителями, которые должны быть союзниками в обучении и воспитании ребенка, что является важным шагом на пути развития личности. Взаимодействие учителей и родителей может проявляться в праве родителей посещать уроки в любой день, в проверке домашнего задания, в вовлечении их в работу школьников во внеурочное время и др. Изучение комплексной деятельности педагогов-новаторов дает возможность заметить, что каждый

---

[1] Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий : в 2 т. М., 2006. Т.1. С. 140–151.
[2] Ильин Е.Н. Путь к ученику: книга для учителя. М., 1988.

из них – это талантливый педагог, добившийся высоких практических результатов и внесший свой вклад в развитие педагогической науки.

Таким образом, анализ концептуальных идей педагогов-новаторов 80-х годов XX века, активно реализующих идеи и принципы педагогики сотрудничества, позволяет утверждать, что их подходы к обучению и воспитанию учащихся представляют новую, гуманистическую систему. В свою очередь появление гуманистического демократического направления в педагогической науке, утверждающего, что в истинной педагогике нет объектов, есть только субъекты деятельности, также носит инновационный характер.

В итоге на основе проделанного анализа литературы, работ по изучению опыта педагогов-новаторов и творчески работающих учителей нашего времени были выделены и обобщены ведущие концептуальные идеи, которые, на наш взгляд, современны и реализуются в настоящее время (рис. 1).

Ведущие идеи педагогики сотрудничества:	
в обучении	*в воспитании*
– взаимодействие; – сотворчество; – успех как главное условие развития детей в обучении; – обучение всех детей с любыми индивидуальными данными; – систематическая обратная связь; – равные условия на уроке для каждого; – комфортность школьников в классе; – коллективная коммуникативность обучения; – усвоение знаний на основе их вариативного и многократного повторения; – учение без принуждения; – ликвидация неуспеваемости и перегрузок; – крупноблочное изложение теоретического материала; – комментируемое управление; – вариативность оценки знаний учащихся; – предупреждение ошибок.	– личность ребенка – главная ценность и основной объект/субъект внимания педагога; – взаимодействие; – сотворчество; – самовоспитание, самосовершенствование и саморазвитие как воспитателей, так и воспитанников; – учет индивидуальных и типологических особенностей всех участников; – забота о себе, окружающих людях и мире; – гуманистический стиль общения и взаимоотношений; – духовно-нравственное обогащение личности; – коллективная творческая деятельность; – добровольность и свобода выбора как формы, содержания дела, так и способов его реализации; – взаимодействие с родителями и социумом; – самоуправление.

Предполагаемый результат
развитие гармоничной, нравственно и духовно совершенной, социально активной, саморазвивающейся личности ребенка через активизацию внутренних резервов

Рис. 1. Основные концептуальные идеи педагогики сотрудничества нашего времени

Современные принципы и концептуальные подходы педагогики сотрудничества современности в обобщенном виде представлены на рисунке 2.

Принципы	*Подходы к организации деятельности*
– профессиональная компетентность;	– антропологический, гуманистический;
– гуманистическая направленность;	– системно-целостный;
– сотрудничество (педагогическое взаимодействие);	– личностно ориентированный;
– культуротворчество;	– субъектно-деятельностный;
– природосообразность;	– полисубъектный;
– творческая направленность развития;	– диалогический;
– интеграция;	– культурологический;
– проблемность и эвристика;	– профессиональное самосовершенствование.
– преемственность;	
– непрерывность.	

Рис. 2. Основные принципы и концептуальные подходы педагогики сотрудничества

Как следует из рисунков, концептуальные идеи, принципы и подходы педагогики сотрудничества 80-х годов XX века составляют основу современной педагогики сотрудничества и являются импульсом к совершенствованию педагогической науки в целом.

Мы убедились, что каждому педагогу-новатору нашего времени присущи свои принципы, которые соотносятся с методологическими, общедидактическими и воспитательными подходами, такими, как антропологический, этнопедагогический, гуманистический, единства объективного и субъективного (внешнего и внутреннего), деятельностный, личностно ориентированный, полисубъектный (диалогический), смыслообразования, культуротворчества, интеграции, творческой направленности развития, взаимодействия, индивидуализации и дифференциации, профессионально-педагогического совершенствования и самосовершенствования, проблемности и эвристики, непрерывности и преемственности.

Кроме того, соотнеся ценности педагогики сотрудничества с общепедагогическими ценностями и учитывая, что педагогические ценности представляют собой нормы, регламентирующие педагогическую деятельность и выступающие как познавательно-действующая система, были выделены как социально-педагогические, так и профессионально-групповые ценности, служащие основой индивидуально-личностной системы ценностей: связанные с утверждением личностью своей роли в социальной и профессиональной среде; удовлетворяющие потребность в общении и расширяющие его круг; ориентирующие на саморазвитие творческой индивидуальности; позволяющие осуществить самореализацию; дающие возможность удовлетворять прагматические потребности.

Таким образом, следует отметить, что в педагогике сотрудничества категория «сотрудничество» выступает как педагогическая ценность, формирующаяся в учебно-воспитательной системе, и в то же время как фактор, объединяющий участников учебно-воспитательного процесса и одновременно ставящий каждого в субъектную позицию в обучении и воспитании. Она является ориентиром по формированию профессиональной компетентности, заботливых, партнерских межличностных взаимоотношений, основанных на взаимопонимании, любви, совести, взаимоуважении, заботе и поддержке в различных видах совместной деятельности, по усвоению учащимися нравственных и эстетических норм и служит развитию гармоничной личности, что соответствует современным гуманистическим концепциям развития.

Концептуальные идеи, принципы и методологические подходы педагогики сотрудничества активно изучаются и применяются в высшей школе. В.И. Андреев, разрабатывая инновационно-прогностический курс педагогики высшей школы, раскрывает совокупность метапринципов (принцип принципов) развития высшего образования: системный (например, системно-целостный, системно-целевой, системно-структурный и т.п.), аксиологический (система ценностей), культурологический (формирование базовой культуры личности), антропологический (целостное знание о человеке), гуманистический (признающий ценность человека как личности), синергетический (процесс взаимодействия двух взаимосвязанных подсистем: преподавания и учения, воспитания и самовоспитания, сотрудничество индивидов), герменевтический (теория и искусство истолкования текстов) [1].

Каждый из этих метапринципов основан на сотрудничестве и взаимодействии субъектов деятельности. Например, гуманизация в плане образования и воспитания требует развития педагогических идей сотрудничества и сотворчества, взаимодействия, основанного на доверительности и взаимной требовательности. Гуманизация образования и воспитания в высшей школе – «это прежде всего совершенствование функционирования и развитие образовательных систем с ориентацией на общечеловеческие цели и ценности, на создание условий

[1] Андреев В.И. Педагогика высшей школы : инновационно-прогностический курс. Казань, 2006. С. 34.

для расцвета и реализации сущностных сил каждого конкретного педагога, студента безотносительно к его достоинствам и недостаткам» [1].

Успешная реализация гуманистического принципа в образовательном учреждении требует признания приоритетных ценностей личности педагога и обучающихся, изменения позиции преподавателя, который должен всегда стоять «впереди обучаемого», а не «над обучаемым», строго соблюдать личностно ориентированный подход в обучении и воспитании.

Концептуальные идеи, принципы и методологические подходы педагогики сотрудничества учитываются в развитии образовательно-воспитательной системы Рязанского государственного университета (РГУ) имени С.А. Есенина [2]. Организуя целостный педагогический процесс, педагоги вуза опираются на принципы организации педагогического взаимодействия, такие, как диалогизация, проблематизация, персонификация, индивидуализация, и создают условия для гуманного педагогического взаимодействия, рассматривая его как основу гуманизации общения преподавателя и студента. Взаимодействие педагогов и студентов осуществляется на лекциях, семинарских и лабораторных занятиях, при выполнении разнообразных творческих работ, во всех видах внеаудиторной деятельности, на которых обсуждаются важнейшие проблемы современного образования.

Ежегодно кафедрой педагогических технологий вуза совместно с управлением учебно-воспитательной работы университета организуется конкурс профессионального мастерства, где студенты всех факультетов, используя технологию коллективной творческой деятельности, демонстрируют свои способности в интеллектуальной деятельности, профессиональной практике, научной работе, актерском мастерстве.

Реализация идей педагогики сотрудничества в учебной и научной работе на факультете истории и международных отношений РГУ осуществляется в индивидуальной и групповой работе со студентами (в учебных и исследовательских группах, научных кружках и секциях) [3].

Так, большинство учебных занятий по английскому языку проводится в форме коллективных творческих дел. Рассмотрим в качестве примера обобщающее занятие на тему «Транспорт в Великобритании и США» («Transport in Great Britain and in the USA»).

На первой стадии предварительной работы со студентами проводятся беседы, выясняются интересующие их вопросы по теме, выдвигаются конкретные образовательные, воспитательные и развивающие задачи, придумываются различные варианты дела, организуется установочная (стартовая) беседа со студентами, определяется ведущая тема занятия.

---

[1] Там же. С. 24.

[2] Гребенкина Л.К., Копылова Н.А. Педагогика сотрудничества: вчера, сегодня, завтра (теория, опыт). Рязань, 2008. С. 101–105.

[3] Байкова Л.А. и др. Методика воспитательной работы. М., 2005.

Вторая стадия коллективного планирования дела включает выбор совета дела, ответственных за распределение ролей и обязанностей, подготовку материала, выбора места, времени и формы проведения.

Третья стадия коллективной подготовки дела проходит в виде уточнения, конкретизации плана подготовки и проведения, организуется выполнение этого плана, окончательно определяются роли, например, ведущие (Interviewers), министр транспорта Великобритании (the Transport Minister of Great Britain), министр транспорта США (the Transport Minister of the USA), водители такси Лондона (London taxi drivers), водители такси Нью-Йорка (New York taxi drivers), водители поездов в Лондоне (London train drivers), водители поездов в Нью-Йорке (New York train drivers), водители автобусов в Лондоне (London bus drivers), водители автобусов в Нью-Йорке (New York bus drivers), менеджеры английских и американских аэропортов (managers of English and American airports), радиослушатели (radio listeners) и т.д.

На четвертой стадии осуществляется конкретный план мероприятия, разработанный советом дела с учетом коррективов, которые вносятся участниками при подготовке коллективного творческого дела. Например, на радиопередачу приглашаются гости, в той или иной мере связанные с проблемой транспорта, которые совместно со студентами обсуждают насущные проблемы. «Радиослушатели» звонят в студию, задают интересующие их вопросы.

На пятой стадии – коллективного подведения итогов – проходит общий сбор участников и анализ проведенного дела (рефлексия), целью которого является выяснение, что удалось и что не получилось, над чем предстоит еще работать, какие необходимо решать педагогические задачи в первую очередь.

Шестая стадия – ближайшее последействие – служит для выполнения решений, принятых в результате коллективного анализа, предложения темы нового коллективного творческого дела, планирования мероприятия по выбранной теме.

Следует отметить, что занятия по иностранному языку в форме коллективного творческого дела помогали всем его участникам высказываться по конкретной тематике, выражать свое мнение, слушать товарищей, вести диалог, спорить, доказывать свою точку зрения. Такие занятия развивают у студентов навыки монологического, диалогического высказывания, решают образовательные и воспитательные задачи (закрепление лексики и грамматики по пройденной теме, знакомство с культурой и обычаями стран изучаемого языка), служат развитию личности.

С целью гуманизации образовательного процесса и расширения профессиональной компетентности будущих специалистов в учебный план по специальности «учитель» был внесен предмет по выбору «Педагогика гуманизма». Мы полагали, что необходимо не просто достичь определенной осведомленности студентов о деятельности педагогов-гуманистов, но и сформировать у них профессиональную гуманистическую позицию, помочь выяснить и осознать сущность и приоритетность гуманного подхода к ребенку в учебно-воспитательном процессе. В связи с этим особое значение имели аудиторные занятия, направленные на активизацию самостоятельной мыслительной деятельности студентов, выработку у них собственного мнения о гуманистическом обучении и воспитании. В организации занятий использовались технологии активного обучения, кроме того, разрабатывались педагогические технологии, рассчитанные на гуманизацию и сотрудничество в подготовке и проведении учебных занятий.

По итогам изучения курса ежегодно проводится опрос студентов по выявлению осознания значимости профессии педагога-гуманиста и потребности в гуманистической деятельности. Данные опроса студентов 3 курса факультета истории и международных отношений представлены в таблице.

Таблица

Осознание студентами значимости приоритетов гуманистической педагогики

Вопрос	*Вариант ответа*	*Количество респондентов, %*
В чем заключаются приоритеты гуманистической педагогики?	Создание гуманных условий	61,5
	Личность ребенка как ценность	59,6
	Любовь и уважение к детям	57,7
	Личностный подход	36,5
	Субъект-субъектные отношения	30,8
	Гармоническое развитие	30,8
	Сотрудничество	26,9
	Общечеловеческие ценности	13,5
Чем привлекает Вас как будущих педагогов гуманистическая педагогика?	Гуманно-ценностное отношение к ребенку	75,0
	Личность как ценность	38,5
	Практическая значимость	34,6
	Гармоническое развитие	23,1
	Субъект-субъектные отношения	23,1
Что нового дал Вам курс «Педагогика гуманизма»?	Персоналии гуманистической педагогики	61,5
	Гуманистические системы и технологии	25,0
	Ребенок – субъект педагогического взаимодействия	13,6
	Я-концепция	9,6
	Ситуация успеха	7,6
	Ценности народной педагогики	7,6

Как показывают данные таблицы, студенты подчеркивают новизну информации изучаемого курса, значимость ее в деятельности учителя, осознают приоритеты гуманистической педагогики, причем главными приоритетами считают признание личности ребенка как ценности 59,6 процента респондентов, любовь и уважение к детям – 57,7 процента, создание для гуманных отношений необходимых условий – 61,5 процента. Для своей будущей профессиональной деятельности в качестве педагога-гуманиста подчеркивают важность признания личности ребенка как ценности 38,5 процента респондентов, гармонического развития детей – 23,1 процента, гуманно-ценностных отношений – 75 процентов и субъект-субъектных отношений – 23,1 процента.

Наше исследование, направленное на изучение гуманистической направленности студентов факультета истории (27 – 2 курса, 23 – 5 курса), показало, что все студенты однозначно понимают значимость общечеловеческих и личностных гуманистических ценностей для их педагогической деятельности. Приоритет отдается прежде всего семье (40 респондентов), образованию, знаниям (40 респондентов), человеку и его здоровью (31 респондент), родине (26 респондентов), культуре (26 респондентов). Менее предпочтительными ценностями для них являются труд (12 респондентов), природа (18 респондентов), религия (15 респондентов). Среди личностных ценностей наиболее предпочтительными являются ценность личного достоинства (37), свобода человека (36), вера в добро и справедливость (31), патриотизм и гражданственность (25).

При изучении предмета по выбору «Педагогика сотрудничества: вчера, сегодня завтра» ставилась цель ознакомить студентов с концептуальными идеями педагогики сотрудничества и деятельностью педагогов-новаторов, определить значимость и пути внедрения технологий для современного учителя, доказать актуальность, современность и значимость идей педагогики сотрудничества для педагогов XXI века, а также для развития теории современной отечественной педагогики.

В соответствии с принципами гуманизации в курсе раскрываются научно-теоретические основы педагогики сотрудничества, истоки и тенденции ее развития, рассматриваются ключевые концепции и вариативные технологии педагогов-новаторов, необходимые для будущих специалистов.

Предмет по выбору «Педагогика сотрудничества: вчера, сегодня, завтра» апробировался в учебном процессе РГУ со студентами 2 курса факультета иностранных языков на отделении «Английский язык». В ходе изучения курса и по его итогам проводилось анкетирование 33 студентов по выявлению знания педагогики сотрудничества. Результаты анкетирования в начале изучения курса представлены в диаграмме на рисунке 3.

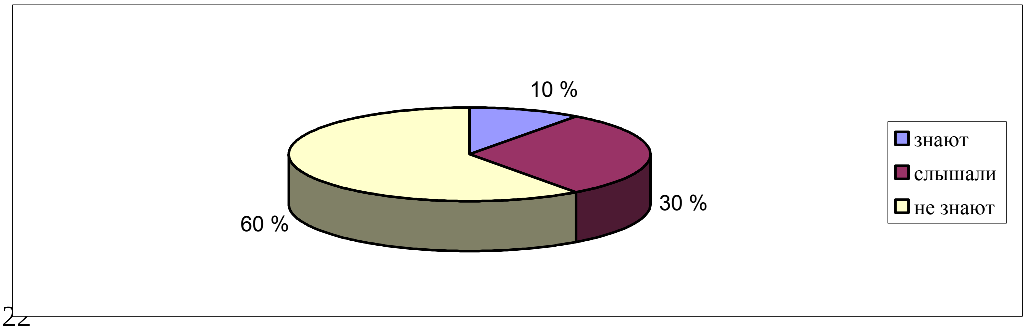

Рис. 3. Показатель знания студентами педагогики сотрудничества в начале изучения курса

После изучения предмета все студенты (100 процентов) стали принимать идеи педагогики сотрудничества. В качестве ведущих они выделили гуманистическую направленность, сотрудничество, творчество, направленность на развитие, субъектную позицию участников целостного педагогического процесса, взаимодействие и совместную деятельность, крупноблочную подачу учебного материала, комментируемое управление, коллективную творческую деятельность, воспитание гражданственности и патриотизма (на основе предмета) в процессе обучения, принципы семейного воспитания. Студенты отмечали, что многие принципы и концептуальные идеи педагогики сотрудничества активно применяются ими и реализуются в школах и что их использование, как полагали 27 студентов (82 процента), принесет только положительные результаты в работе современной школы.

Мы убедились, что профессиональному росту и воспитанию будущих педагогов как нельзя лучше способствуют организация занятий на основе взаимодействия, создания ситуации успеха, диалога и стимулирования самостоятельной педагогической работы студентов, поддержка их исследовательских проектов. В практику преподавателей кафедры педагогических технологий вошли такие формы учебных занятий, которые предполагают совместную деятельность преподавателей и студентов, их активное участие в подготовке и проведении коллективной творческой деятельности. Кроме того, преподаватели поддерживают так называемые «вертикальные» взаимосвязи: студенты старших курсов становятся организаторами занятий и внеаудиторной деятельности для младших. Это дает возможность совершенствовать знания, вырабатывать профессиональные умения, изменяет социальный статус студента, позволяет формировать адекватную самооценку. Включение в педагогическую деятельность позволяет студенту корректировать и мотивационную сферу – развить мотивацию достижения успеха. Как правило, появляется желание продолжать свою работу с младшими курсами, рождается инициатива. Особенно ярко проявляется такое взаимодействие в работе студентов-кураторов.

Таким образом, изучение концептуальных идей педагогики сотрудничества и организация опыта преподавателей отечественной высшей школы по их использованию, в частности идеи педагогического взаимодействия и совместной деятельности, способствуют модернизации образования и повышению качества подготовки будущих специалистов и педагогов вуза в рамках перехода на многоуровневое образование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, В.И. Педагогика высшей школы: инновационно-прогностический курс. – Казань, 2006.
2. Байкова, Л.А. Методика воспитательной работы / Л.А. Байкова [и др.]. – М., 2005.
3. Войдем в новую школу // Учительская газета. – 1988. – 18 окт.
4. Гребенкина, Л.К. Педагогика сотрудничества: вчера, сегодня, завтра (теория, опыт) / Л.К. Гребенкина, Н.А. Копылова. – Рязань, 2008.
5. Демократизация личности // Учительская газета. – 1987. – 17 окт.
6. Ильин, Е.Н. Путь к ученику : кн. для учителя. – М., 1988.
7. Коротаева, Е.В. Педагогическое взаимодействие: опыт проблемного анализа. – Екатеринбург, 2007.
8. Методика обновления // Учительская газета. – 1988. – 19 март.
9. О программе модернизации педагогического образования. – Приказ Министерства образования Российской Федерации № 1313 от 1 апреля 2003 г. – М., 2003.
10. Педагогика сотрудничества // Учительская газета. – 1986. – 18 март.
11. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий : в 2 т. – М., 2006.
12. Сластенин, В.А. Педагогика / В.А. Сластенин [и др.]. – М., 2006.
13. Сотрудничество педагогов и учащихся как педагогическое явление / под ред. З.И. Васильевой. – Л., 1989.

ИСТОРИЯ

Л.Н. Вдовина

РЯЗАНСКИЙ КРАЙ В БИОГРАФИИ ИСТОРИКА, РЕКТОРА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА М.К. ЛЮБАВСКОГО (к 150-летию со дня рождения)

Статья посвящена малоизвестным страницам жизни уроженца Рязанской губернии, видного российского историка, ректора Московского университета, академика М.К. Любавского. На основе анализа широкого круга источников и литературы автор показывает, что период учебы в Рязанской духовной семинарии и окружающая обстановка во многом сыграли определяющую роль в выборе жизненного пути будущим ученым.

историк, Любавский М.К., Рязанский край, Рязанская духовная семинария, Ключевский В.О., Московский университет.

Рязанский край занимает особое место в жизни известного историка, академика Российской академии наук, ректора Московского университета Матвея Кузьмича Любавского (1860–1936). Детство и юность его прошли на Рязанской земле. Он родился 1 августа 1860 года в бедной семье дьячка церкви Михаила Архангела села Большие Можары Сапожковского уезда Рязанской губернии. В 1870–1874 годах учился в Сапожковском духовном училище, затем до 1878 года – в Рязанской духовной семинарии. После четвертого класса Матвей Любавский ушел из семинарии и поступил на историко-филологический факультет Московского университета, где ему предстояло пройти путь от студента до профессора и ректора.

М.К. Любавский был одним из многих молодых людей, родившихся в российской провинции, которые, окончив Московский университет, добились заметных успехов в научной, государственной, общественной деятельности на благо России. Московский университет с момента своего основания давал реальную возможность получения равного образования представителям разных сословных групп, в том числе выходцам из разночинной среды, расширяло их жизненные горизонты, давало шансы сделать успешную служебную карьеру. Социализация молодого человека из провинции и роль в этом процессе Московского университета – тема особая, хронологически охватывающая все периоды истории этого учебного заведения [1]. Естественно, в определенную историческую эпоху этот процесс был наполнен своим содержанием, но результат, если понимать под ним личное продвижение выпускников Московского университета по социальной лестнице, – общим. Поэтому обращение к конкретным судьбам питомцев университета особенно важно, поскольку позволяет представить не только общее, но и индивидуальное, личное, то, чем в действительности являлся процесс социализации для каждого из них.

М.К. Любавский принадлежал к духовному сословию, что само по себе давало некоторые права и налагало определенные обязанности. В России к концу XVIII века духовенство сложилось как сословие, для которого было характерно ограничение доступа и свободного выхода из него, требования специального духовного образования, практика наследования церковных должностей [2]. Хотя дети духовенства, как правило, получали образование в духовных учебных заведениях, тем не менее, в составе университетского студенчества они составляли в 1850–1860-е годы 8,2–8,3 процента [3]. Однако традиционный путь получения образования, особенно для детей церковнослужителей, к которым принадлежал Матвей Кузьмич, оставался прежним – духовные училища и духовные семинарии.

Воспитание детей в семье Любавских основывалось на православных традициях. Первоначальное обучение грамоте по часослову и Псалтири М.К. Любавский получил дома под руководством деда, Федота Евтропиевича, сельского дьячка. Обучение продвигалось столь успешно, что в четыре года он читал церковнославянские тексты [4], а став постарше, продолжил учебу у дяди, Николая Игнатьевича Успенского, священника церкви Святой Троицы из соседнего села Малые Можары. В отличие от родителей М.К. Любавского, отца Кузьмы Ивановича, который не был силен в грамоте, и совсем неграмотной матери Матрены Федотовны, Н.И. Успенский получил духовное образование и тяготел к педагогической деятельности. В 1862 году он открыл в Малых Можарах школу, которая вначале находилась в его доме, пока в 1878 году не было построено для нее специальное здание. В церковноприходской школе у Успенского училось до 50 детей, что явно не охватывало всех детей школьного возраста. Население сел Большие Можары (191 двор) и Малые Можары (205 дворов) насчитывало в 1859 году 4159 человек. Селами в разное время владели известные дворянские фамилии – Стрешневы, Голицыны, Шереметевы, Шуваловы и Гурьевы [5].

[1] Вдовина Л.Н. Московский университет и социализация молодого человека из провинции во второй половине XVIII – начале XIX века // Культура российской провинции: век XX – XXI веку : тез. докл. Калуга, 2000. С. 49–51.

[2] Смолич И.К. История русской церкви. 1700–1917. Ч. 1. М., 1996. С. 319.

[3] Миронов Б.Н. Социальная история России. Т. 1. СПб., 1999. С. 139.

[4] Из воспоминаний В.М. Ливановой-Любавской // Исторический архив. 2000. № 4. С. 201–202.

[5] Слепихин А.И. Это было в Можарах (на земле Рязанской) : очерки краеведа. М., 1997. С. 18, 65, 67, 72.

В 1870 году М.К. Любавский поступил в духовное училище, которое находилось в Сапожке, маленьком захолустном уездном городе. Сапожковское духовное училище было открыто в 1816 году. В середине 1860-х годов на трех его отделениях обучалось 203 ученика, по 40–50 человек в классе [1]. Общежития (или бурсы) в училище не было, поэтому ученики должны были снимать жилье. Воспоминания об этом периоде жизни у М.К. Любавского, по словам его дочери, были безрадостными: бедное и грязное жилище, скудная еда, грубые забавы. Примечательно, что в среде семинаристов в 1850-е годы появилась поэма «Семинариада» о жизни воспитанника духовного училища и семинарии с ироничными и горькими бытовыми зарисовками. Так, о выборе квартиры говорилось следующее: «Там тесно, пища здесь дурна, / А там хозяйка – сатана, / С ней дня не проживешь без брани, / На этой – лишней много дряни».

Сам процесс обучения в духовном училище оставлял желать много лучшего: «Во всем здесь хаос первобытный – / В словах, и в мыслях, и в делах: / Один твердит урок забытый, / А там хлопочут о лозах, / Шумят, шалят, дерутся, пляшут, / Теснятся, друг на друга скачут». К тому же учитель («настоящий был мучитель») «драл без оправданья», исправляя таким способом «неисправимые пороки». Но семинарский фольклор, если судить по «Семинариаде», изображал нравы в духовных учебных заведениях мягче и терпимее, чем появившиеся в то же время «Очерки бурсы» Н.Г. Помяловского [2].

В духовном училище дети духовенства получали первоначальное образование. Среди предметов, которые изучались на протяжении четырех лет, были Священная история Ветхого и Нового Завета, катехизис, объяснение богослужения с церковным уставом, церковное пение, церковнославянский, русский и греческий языки, арифметика, география, чистописание. Первые испытания самостоятельной жизни М.К. Любавский выдержал с честью. Он не только сам прекрасно учился, но и постоянно занимался с отстающими в учебе товарищами. Из духовного училища для сына дьячка был только один путь – духовная семинария. Закончив в 1874 году Сапожковское духовное училище, М.К. Любавский блестяще сдал экзамены и был принят в Рязанскую духовную семинарию. Семинарское образование почти гарантировало в дальнейшем получение места священника.

Духовная семинария была предназначена для подготовки юношества в течение шести лет к служению в православной церкви. Кроме широкого круга богословских предметов, преподавались русская словесность и история литературы, всеобщая и русская гражданская история, математика, физика, логика, психология, основы философских учений, педагогика и дидактика, латинский, греческий, французский (или немецкий) языки, рисование, музыка, пение.

В Рязани начало духовного образования относится к 1724 году, когда в Переяславле-Рязанском была открыта архиерейская школа, где должны были учиться сыновья священников, дьяконов и причетников. С 1743 года рязанская

[1] Макарий (архимандрит). Историко-статистическое описание Рязанской духовной семинарии и подведомственных ей духовных училищ. Новгород, 1864. С. 147.

[2] Петров Н.И. К истории внутренней жизни духовных семинарий. М., 1899.

архиерейская школа стала называться славяно-латинской семинарией. В 1812–1816 годах по проекту петербургского архитектора А.А. Михайлова для нее было построено каменное двухэтажное здание. На первом этаже располагались жилые помещения для семинаристов, рассчитанные на 150 воспитанников, на втором – классные комнаты, библиотека, два экзаменационных зала, канцелярия, помещение для шести учителей (по штату их должно было быть одиннадцать).

В библиотеке семинарии насчитывалось 5,5 тысячи книг, причем помимо учебной литературы имелись книги по истории, в том числе античной и средневековой, философии, русской литературе (летописи, «Деяния Петра Великого» И.И. Голикова, «Древняя Российская Вивлиофика», изданная Н.И. Новиковым, Собрание государственных грамот и договоров, Акты исторические, «История государства Российского» Н.М. Карамзина, издания сочинений М.М. Щербатова, Г.Р. Державина, труды Стефана Яворского («Камень веры») и Димитрия Ростовского и др.). На комплектование библиотеки в конце 1860-х годов выделялось ежегодно 400 рублей, что позволяло покупать книги и выписывать газеты и журналы («Московские ведомости», «Сын Отечества», «Северная пчела», «Библиотека для чтения», «Журнал Министерства народного просвещения») [1].

В 1862 году в Рязани проездом оказался В.О. Ключевский, в то время студент историко-филологического факультета Московского университета. В поисках своего учителя по Пензенской семинарии Н.Ф. Глебова он посетил Рязанскую духовную семинарию. Увиденное там привело его в полный восторг: «Вот здание-то! Полы чугунные, над классами доски с надписью, двор чистый, лестницы – что в университете, церковь семинарская – просто шикарство» [2]. При семинарии была церковь в честь Владимирской иконы Божьей Матери. Улица, на которой находилась семинария, так и называлась – Семинарская. Она пересекалась с одной из центральных улиц города – Астраханской и Соборной улицей, которая вела к кремлю и Успенскому собору, к набережной реки Трубеж, откуда открывался вид на окские дали. На Соборную улицу в 1832 году перевели духовное училище. На этой же улице в здании, построенном в 1862 году, находился драматический театр – центр культурной жизни города. Но учащимся духовных училищ и семинарий запрещалось посещать спектакли.

В 1864 году в Рязанской семинарии обучалось 428 человек, всего же с 1814 по 1864 год училось 5500 человек, из которых закончили полный курс обучения только 2585 [3]. Духовное образование уступало гимназическому в знании новых языков и естественных наук, но сравнение исключительно в пользу гимназий было бы односторонним. И.П. Павлов, будучи учащимся Рязанской духовной семинарии в 1864–1869 годах, вспоминая о том времени, с благодар-

---

[1] Агнцев Д. История Рязанской духовной семинарии. 1724–1840. Рязань, 1889. С. 248–256 ; Попов И.П. Очерки истории культуры Рязанского края (XV–XX вв.). Рязань, 1994. С. 45 ; Титлинов Б.В. Духовная школа в России в XIX столетии. Вып. 2. Вильна, 1909. С. 351–352.

[2] Ключевский В.О. Соч. : в 9 т. М., 1990. Т. 9. С. 214.

[3] Макарий (архимандрит). Историко-статистическое описание Рязанской духовной семинарии... С. 68, 70.

ностью замечал: «…в семинарии того времени… было то, чего так недоставало печальной памяти толстовским гимназиям... – возможности следовать индивидуальным умственным влечениям. Можно было быть плохим по одному предмету и выдвигаться по другому, что не только не угрожало вам какими-либо неприятностями до увольнения включительно, а даже привлекало к вам особенное внимание: а не талант ли?» [1]. В упоминавшейся «Семинариаде» в воспоминаниях о годах учебы бывшего семинариста также звучат ностальгические нотки: «Так семинарии мне жаль! / Она была мне не чужая, / Но как-то близкая, родная. / В ней целых шесть я прожил лет, / В ней развились мои желанья, / В ней возросли мои познанья, / Она была мне – целый свет».

М.К. Любавский учился в Рязанской духовной семинарии с 1874 по 1878 год. В ведомости 4 класса за 1877/78 учебный год он значился в списке из 55 учеников пятым по успехам в учебе [2]. В другой ведомости значилось, что Матвей Любавский, сын псаломщика из Сапожковского уезда села Большие Можары Козьмы Любавского, «казенным содержанием не пользовался» и был приписан по месту жительства к первому участку города Рязани [3]. Это означало, что он жил на частной квартире, а не в семинарском общежитии. Поскольку материальное положение семьи было более чем скромным и родители помочь ему ничем не могли, М.К. Любавский вынужден был зарабатывать частными уроками, заниматься с отстающими учениками. Известно также, что в семинарские годы он много читал, отдавая предпочтение книгам по истории. Гражданскую историю в семинарии увлеченно преподавал М.В. Зноров, повлиявший на выбор Любавским пути историка и преподавателя.

В пореформенные годы, по словам современника, «Рязань – тихий и сонный провинциальный город – как бы забродила… в ней стал нарождаться интерес и порыв к общественной деятельности, чувствовался общий подъем в ожидании чего-то» [4]. Открытая в 1858 году на Почтовой улице городская публичная библиотека стала местом встреч гимназистов и семинаристов. Здесь читали по очереди литературные новинки, напечатанные в «Отечественных записках», «Русском слове», «Современнике», «Русском вестнике». В Рязани появились новые учебные заведения: женское епархиальное училище (1853), Александровская учительская семинария (1869), Мариинская женская гимназия (1870). В 1862 году Рязань связала с Москвой железная дорога.

Семинарская молодежь с середины 1850-х годов пополняла ряды разночинной левой интеллигенции. Приток выходцев из духовенства в народническую среду в 1870-е годы достиг 22 процентов [5]. Еще Н.А. Бердяев пытался найти этому процессу объяснение. По его мнению, «семинаристы через православную школу получали формацию души, в которой большую роль играет мо-

[1] Павлов И.П. Автобиография // «…Чтобы не престала память родителей наших и наша, и свеча не погасла». Изборник. К 900-летию Рязани. Рязань, 1995. С. 325.

[2] Государственный архив Рязанской области. Ф. 634. Оп. 1. Д. 55. Л. 9 об. 10.

[3] Там же. Д. 54. Л. 11 об.–12.

[4] Попов И.П. Очерки истории культуры Рязанского края (XV–XX вв.). С. 123.

[5] Миронов, Б.Н. Социальная история России. С. 107.

тив аскетического миросозерцания». В дальнейшем жажда социальной правды, идущая от христианства, проникнутая освободительными идеями просвещения, преломлялась в суровых, моралистических натурах семинаристов, закаленных тяжелой жизнью «по-русски, то есть экстремистки, нигилистически» [1]. Но среди поповичей было немало молодых людей, ставших не на стезю разрушения, а избравших путь созидания, в том числе служения науке и образованию. Отчасти этому способствовали церковные реформы, начавшиеся в конце 1860-х годов. Для духовного сословия особенно важны были Указ 1867 года, отменивший наследование по родству мест священно- и церковнослужителей, и Указ 1869 года, освободивший детей духовенства от обязательной приписки к духовному сословию.

Наследственная замкнутость духовенства была нарушена, и дети смогли воспользоваться тем, чего были лишены их отцы. В числе таких молодых людей был и М.К. Любавский. Трудно сейчас с уверенностью сказать, что подействовало на его решение продолжить образование в университете: желание вырваться из привычной среды, жажда новых знаний и встреч с новыми людьми, оценка своих возможностей и реального приложения сил. Сделать выбор было непросто хотя бы потому, что на поездку в Москву не было денег. После четвертого класса, в 1878 году, сдав в семинарии экстерном экзамены за шесть лет, М.К. Любавский, благодаря материальной поддержке своего дяди Н.И. Успенского, уезжает из Рязани и поступает на историко-филологический факультет Московского университета. Рязанский период М.К. Любавского закончился. Началась новая страница его биографии.

Много лет спустя, будучи уже известным историком и ректором Московского университета, М.К. Любавский, вспоминая о своем учителе В.О. Ключевском, писал: «Первоначальная жизненная обстановка несомненно оказала сильное и в общем благотворное влияние на развитие будущего русского историка. Поставив его близко, лицом к лицу, к русской природе и к быту сельского населения, эта первоначальная обстановка дала его восприимчивой душе ряд неизгладимых впечатлений, ряд представлений, которые облегчили ему впоследствии понимание народной жизни в прошедшем. Эта же первоначальная обстановка обвеяла его юную душу и тем нравственным теплом, которым, несмотря ни на что, согрета трудовая жизнь русской деревни» [2]. Эти удивительные, выстраданные и своей собственной жизнью слова могут быть отнесены и к юным годам самого М.К. Любавского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агнцев, Д. История Рязанской духовной семинарии. 1724–1840. – Рязань, 1889. – С. 248–256;
2. Бердяев, Н.А. Истоки и смысл русского коммунизма. – М., 1990.

[1] Бердяев Н.А. Истоки и смысл русского коммунизма. М., 1990. С. 40.
[2] Любавский, М.К. Василий Осипович Ключевский. М., 1914. С. 3.

3. Вдовина, Л.Н. Московский университет и социализация молодого человека из провинции во второй половине XVIII – начале XIX века // Культура российской провинции: век XX – XXI веку : тез. докл. – Калуга, 2000. – С. 49–51.
4. Государственный архив Рязанской области. – Ф. 634. – Оп. 1. – Д. 55. – Л. 9 об. – 10 ; Д. 54. – Л. 11 об. – 12.
5. Из воспоминаний В.М. Ливановой-Любавской // Исторический архив. – 2000. – № 4.
6. Ключевский, В.О. Соч. : в 9 т. – М., 1990. – Т. 9. – С. 214.
7. Любавский, М.К. Василий Осипович Ключевский. – М., 1914.
8. Макарий (архимандрит). Историко-статистическое описание Рязанской духовной семинарии и подведомственных ей духовных училищ. – Новгород, 1864.
9. Миронов, Б.Н. Социальная история России. – Т. 1. – СПб., 1999.
10. Павлов, И.П. Автобиография // «…Чтобы не престала память родителей наших и наша, и свеча не погасла». Изборник. К 900-летию Рязани. – Рязань, 1995.
11. Петров, Н.И. К истории внутренней жизни духовных семинарий. – М., 1899.
12. Попов, И.П. Очерки истории культуры Рязанского края (XV–XX вв.). – Рязань, 1994.
13. Слепихин, А.И. Это было в Можарах (на земле Рязанской) : очерки краеведа. – М., 1997.
14. Смолич, И.К. История русской церкви. 1700–1917. – Ч. 1. – М., 1996.
16. Титлинов, Б.В. Духовная школа в России в XIX столетии. – Вып. 2. – Вильна, 1909.

И.Н. Гребенкин

СТАВКА ВЕРХОВНОГО ГЛАВНОКОМАНДУЮЩЕГО И ПРОТИВОСТОЯНИЕ ПОЛИТИЧЕСКИХ СИЛ В 1914–1916 ГОДАХ

Статья посвящена роли высшего командования Российской императорской армии в политической жизни страны периода Первой мировой войны. Основное внимание уделено проблеме взаимодействия Ставки Верховного главнокомандующего с институтами государственного управления России. Рассмотрены политические аспекты деятельности руководителей Ставки, их контакты и характер отношений с представителями различных политических сил. Анализируются политические интересы и настроения первых лиц военного командования и их значение для политической борьбы накануне революции 1917 года.

Первая мировая война, Ставка Верховного главнокомандующего, государственное управление, Государственная дума, политические силы, политическая борьба.

Начало Первой мировой войны ознаменовало беспрецедентный рост значимости и участия военных во всех сферах жизни страны. В силу первостепенной важности задач ведения войны высшее военное командование получило огромное влияние на принятие административных и хозяйственных решений, выработку внутренней и внешней политики государства. В первую очередь это

отразилось на системе государственного управления империи. Одно из центральных мест в ней заняла Ставка Верховного главнокомандующего, созданная для руководства армией на театрах военных действий. Наряду со Ставкой управление вооруженными силами продолжало осуществлять и Военное министерство, в ведении которого оставались задачи укомплектования и снабжения армии,
а также прохождение службы личным составом. Спешно подготовленное и принятое 16 июля 1914 года «Положение о полевом управлении войск в военное время» не устанавливало подчинения военного министра Верховному главнокомандующему, что заведомо создавало почву для определенного противостояния и конфликтов между высшим фронтовым и тыловым командованием. В этой ситуации особую остроту приобретал вопрос о персональном подборе и взаимоотношениях лиц, занимающих эти посты.

Данное положение сложилось, по той причине, что в роли Верховного главнокомандующего первоначально предполагалась фигура самого императора, что даже было установлено Высочайшим рескриптом от 4 февраля 1903 года. Такое решение автоматически снимало бы проблему приоритетов и взаимного подчинения во всех управленческих звеньях. Однако, столкнувшись с практически единодушным мнением министров, заключавшемся в том, что государь не должен покидать столицу, Николай II не решился провозгласить себя Верховным главнокомандующим [1]. Таким образом, сам выбор кандидата на этот пост, подразумевавший огромную власть, уже приобретал политическое звучание.

Первоначально для этого рассматривалась кандидатура военного министра В.А. Сухомлинова, но, как свидетельствует В.Н. Воейков, Николай II после недолгих раздумий высказался в пользу своего двоюродного дяди – Великого князя Николая Николаевича-Младшего [2]. Данное решение император все же полагал временным. Приняв у себя 19 июля Николая Николаевича, он записал в дневнике: «...объявил ему о его назначении Верховным главнокомандующим вплоть до моего приезда в армию» [3]. В именном Высочайшем указе Правительствующему сенату от 20 июля о назначении Великого князя Верховным главнокомандующим говорилось, что Николай II делает свой выбор, «не признавая возможным, по причинам общегосударственного характера, стать теперь же во главе наших сухопутных и морских сил, предназначенных для военных действий» [4].

В условиях патриотического подъема первых дней войны эти обстоятельства остались не заметны для широкой общественности. Политические круги

---

[1] Сухомлинов В. Воспоминания. Берлин, 1924. С. 292 ; Григорович И.К. Воспоминания бывшего морского министра. СПб., 1999. С. 143 ; Кондзеровский П.К. В Ставке Верховного: 1914–1917. Воспоминания дежурного генерала при Верховном главнокомандующем. Париж, 1967. С. 10.

[2] Воейков В.Н. С царем и без царя: Воспоминания последнего дворцового коменданта государя императора Николая II. Гельсингфорс, 1936. С. 89.

[3] Дневники императора Николая II. М., 1991. С. 477.

[4] Летопись войны. 1914. № 1. С. 4.

восприняли фигуру Николая Николаевича во главе действующей армии, подобно и иным шагам высшей власти, с благосклонностью. Весь составивший немногим более года период пребывания Великого князя на посту Верховного главнокомандующего можно характеризовать как триумфальное восхождение к вершинам общественного обожания. Николая Николаевича, чья многолетняя военная служба прошла на строевых должностях, ценили и уважали в армии. Известность о нем как о резком, но волевом и справедливом начальнике стала предпосылкой популярности, которая в дальнейшем не уменьшалась в войсках, а распространялась среди широких масс населения, неминуемо обрастая слухами и легендами. Механизм формирования образа Верховного главнокомандующего достаточно точно вскрыл известный историк и публицист М.К. Лемке. «Все слышали в свое время о горячем, порывистом и несдержанном характере Николая Николаевича. Теперь ему придали благородные черты реформатора армии, ярого сторонника правды, решительного искоренителя лжи, удовлетворяя этим свой запрос на подобные положительные качества, – отсюда легенды не о том, что было и есть, а о том, чего так хотелось бы» [1]. С ним согласен крупный военный специалист эмиграции генерал Н.Н. Головин: «Народные массы стремились воплотить в нем черты любимого вождя» [2]. Исходя из такой точки зрения, современный исследователь О.Р. Айрапетов, детально изучавший феномен популярности Великого князя на посту Верховного главнокомандующего, сделал вывод о том, что он воплотил в себе актуализировавшийся в военное время общественный запрос на диктатора и диктатуру [3]. Таким образом, Николай Николаевич становился и, что не менее важно, воспринимался политической фигурой с особыми возможностями влияния и самостоятельными интересами.

Интересы эти были вполне сводимы к упрочению положения Верховного главнокомандующего между действующей армией и монархом, превращению из временного положения в постоянное и надежное. Данная задача естественным образом разрешалась бы при однозначно успешном развитии военных событий на фронтах, однако их итоги в 1914–1915 годах не являлись таковыми. Кроме того, популярность Великого князя в армии и обществе приводила к возраставшей все время подозрительности и раздражению части придворных кругов, тон которым задавала императрица Александра Федоровна. С своих письмах Николаю II она не скрывала недоверия и неприязни как к Николаю Николаевичу лично, так и к Ставке в целом [4].

Если саму работу Верховного главнокомандующего сложно было представить вне контактов с различными политическими силами и деятелями, то необходимость утверждать свой статус и влияние неминуемо подталкивала его к участию в политической борьбе и интригах на стороне тех или иных группи-

---

[1] Лемке М.К. 250 дней в царской ставке. Т. 1. Минск, 2003. С. 104.

[2] Головин Н.Н. Военные усилия России в мировой войне. М. ; Жуковский, 2001. С. 320.

[3] Айрапетов О.Р. Генералы, либералы и предприниматели: работа на фронт и революцию. 1907–1917. М., 2003. С. 51.

[4] Переписка Николая и Александры Романовых. Т. 3 : 1914–1915. М. ; Л., 1923. С. 207, 218, 225, 244.

ровок. Одной из наиболее заметных сторон политической активности Ставки и лично Верховного главнокомандующего являлся все время нараставший конфликт с военным министром. Отношения Великого князя с В.А. Сухомлиновым были испорчены с 1905 года, когда последний критически отозвался о проектах реформирования армии, предложенных Николаем Николаевичем [1]. Верховный главнокомандующий, стремившийся к более полному подчинению себе тыла армии, склонен был представлять многие трудности, стоящие перед действующей армией, результатом неудовлетворительной работы ряда ведомств, и в особенности Военного министерства.

Центральной проблемой, получившей широкий общественный резонанс и разыгрываемой политическими силами в собственных интересах, явилось снабжение фронта артиллерийскими боеприпасами. «Снарядный голод», наметившийся уже к концу 1914 года, был обусловлен неверной оценкой потребности в боеприпасах для артиллерии, сделанной до войны, и серьезно сказался на боеспособности и настроениях войск спустя полгода после начала войны. Более того, вопрос об артиллерийском снабжении был поднят либеральными кругами и прессой и использовался в открывшейся кампании критики правительства. В данном пункте совпали устремления Верховного главнокомандующего и думских деятелей, представлявших интересы крупного российского капитала.

Чтобы вывести дело артиллерийского снабжения из ведения Военного министерства, 1 января 1915 года Ставкой была образована Особая распорядительная комиссия по артиллерийской части. Председателем ее был утвержден генерал-фельдцейхмейстер Великий князь Сергей Михайлович, но реально работой руководил его помощник, знающий артиллерист и талантливый организатор генерал А.А. Маниковский. В конце мая он же возглавил Главное артиллерийское управление. Несмотря на то, что в первой половине 1915 года производство снарядов неуклонно возрастало, быстрого перелома в снабжении армии боеприпасами не произошло. В условиях начавшегося наступления противника и неудач на фронте данная проблема стала предметом усиленной критики, а порой и спекуляций думских либералов, упрекавших военные и государственные структуры в коррупции и неспособности наладить дело. Персональная же ответственность возлагалась на военного министра В.А. Сухомлинова.

В качестве решения проблемы предлагалось участие представителей цензовой общественности в организации работы промышленности, распределении военных заказов и контроле за их исполнением. Функции эти должен был исполнять особый межведомственный орган с широкими полномочиями. Проводником этих планов на высшем военном и государственном уровне стал глава Государственной думы М.В. Родзянко. Вместе с ним для переговоров в Ставку приезжали видные предприниматели и финансисты В.П. Литвинов-Фалинский, А.И. Вышнеградский, А.И. Путилов. Совместными усилиями им удалось заручиться благосклонностью и поддержкой Николая Николаевича, который до это-

[1] Сухомлинов В. Воспоминания. С. 304 ; Данилов Ю.Н. Великий князь Николай Николаевич. М. ; Жуковский, 2006. С. 114.

го уже оказывал протекцию Земскому и Городскому союзам, испросив для них государственные субсидии [1]. Несмотря на прохладное отношение правительства и противодействие военного министра Сухомлинова, против которого данная кампания была направлена в первую очередь, идея получила одобрение Николая II и 14 мая 1915 года к работе приступило Особое совещание по обороне. В его состав вошли Председатель Государственной думы, по четыре представителя от Государственной думы, Государственного совета, торговли и промышленности – по высочайшему назначению, а также представители министерств: военного, морского, финансов, путей сообщения, торговли и промышленности, государственного контроля. Совещание подчинялось императору, но в качестве председательствующего был определен военный министр, что должно было стать своего рода уступкой военному ведомству. С первых дней работы Особого совещания М.В. Родзянко использовал его трибуну для критики правительства И.Л. Горемыкина.

Фактически одновременно с образованием Особого совещания по обороне в конце мая 1915 года во время IX торгово-промышленного съезда была провозглашена идея создания военно-промышленных комитетов – общественных организаций, целью которых должно было стать содействие правительству в деле мобилизации промышленности. Комитеты очень быстро начали возникать в разных городах, а спустя два месяца на I съезде их представителей при поддержке Московского военно-промышленного комитета, возглавляемого П.П. Рябушинским, был образован Центральный комитет под председательством А.И. Гучкова. С созданием в кратчайшие сроки Особого совещания и военно-промышленных комитетов была построена альтернативная государственной система, связывавшая военного заказчика с частной промышленностью, но субсидируемая государством из сумм, выделяемых на военные заказы. Их руководство активно использовало свои контакты с высшим военным командованием в деловых и политических комбинациях. Оценка деятельности Центрального военно-промышленного комитета с точки зрения охранительных структур принадлежала начальнику Петроградского охранного отделения К.И. Глобачеву: «Комитет являлся, так сказать, той легальной возможностью, где можно было совершенно забронированно вести разрушительную работу для расшатывания государственных устоев, создать до известной степени один из революционных центров и обрабатывать через своих агентов армию и общество в нужном для себя политическом смысле» [2].

Однако, для того чтобы система начала уверенно функционировать, лидерам либералов и бизнеса необходимо было удалить с ключевых государственных постов нежелательных лиц. Еще находясь в Ставке, М.В. Родзянко настойчиво внушал Николаю Николаевичу, что именно он, Верховный главнокомандующий, должен требовать изменений в правительстве, имея в виду в первую очередь отставку министра внутренних дел Н.А. Маклакова и военного мини-

[1] Айрапетов О.Р. Генералы, либералы и предприниматели... С. 64–65.

[2] Глобачев К.И. Правда о русской революции. Воспоминания бывшего начальника Петроградского охранного отделения. М. : РОССПЭН, 2009. С. 66.

стра В.А. Сухомлинова. На свою сторону М.В. Родзянко склонял и главных должностных лиц Ставки – начальника штаба Н.Н. Янушкевича и генерал-квартир-
мейстера Ю.Н. Данилова, убедив их в том, что своими стараниями может добиться улучшений в снабжении действующей армии боеприпасами и оружием [1]. Таким образом, Председателю Государственной думы удалось подготовить еще один канал давления на императора. Состоявшийся в первой половине мая приезд Николая II в Ставку был отмечен тем, что, по воспоминаниям В.Н. Воейкова, «заметно стало стремление чинов Ставки к вмешательству в дела внутреннего управления» [2]. Результатом объединения позиций и усилий думских деятелей в лице М.В. Родзянко и Верховного главнокомандования можно считать последовавшую в июне 1915 года отставку Н.А. Маклакова и В.А. Сухомлинова. На смену последнему по рекомендации Верховного главнокомандующего был назначен генерал А.А. Поливанов, человек близкий к А.И. Гучкову и одно из центральных действующих лиц в кампании против В.А. Сухомлинова. Фигура Поливанова во главе Военного министерства являлась сугубо политическим решением. Получив одобрение императора, она удовлетворяла как Ставку, так и думские круги. И хотя снабжение армии продолжало испытывать множество проблем, сам министр уже не являлся объектом критики по этому поводу. Более того, он всячески демонстрировал свою решимость работать в контакте с «общественными деятелями» даже в отношении руководства своим ведомством.

В Барановичах 14 июня состоялось совместное заседание высшего руководства Ставки и измененного состава правительства под председательством императора. В вышедшем в тот же день Высочайшем рескрипте объявлялось о решении государя не позже августа месяца созвать сессию Государственной думы. Необходимость ее созыва обосновывалась деятельностью Особого совещания по обороне. Таким образом, Николай II признавал возможность и целесообразность сотрудничества правительства и цензовой общественности в вопросах организации снабжения армии. Это решение, как и предшествовавшие ему создание Особого совещания по обороне и министерские перестановки, являлось результатом постоянного направленного воздействия на императора и вряд ли было достижимо для Родзянко и стоявших за ним сил без такого весомого союзника, как Верховной главнокомандующий. Его роль в произошедшем была в известном смысле решающей.

В сложный для страны и армии момент Великий князь Николай Николаевич не впервые показал способность вести политическую интригу, а при необходимости оказывать давление и манипулировать императором. Успех его состоялся в коалиции и при совпадении интересов с думскими и деловыми кругами. Совпадение сиюминутных интересов, однако, не может считаться тождественным совпадению конечных целей. Данный довод позволяет задуматься о самостоятельности роли Николая Николаевича в политической игре первой по-

---

[1] Родзянко М.В. Крушение империи. Харьков, 1990. С. 109–110.
[2] Воейков В.Н. С царем и без царя. С. 126.

ловины 1915 года. Думские деятели, стремившиеся к политическим реформам и использовавшие любые возможности для перераспределения в свою пользу влияния и власти, видели в Верховном главнокомандующем в первую очередь орудие собственной борьбы. Великий князь избрал их своими союзниками, считая, что сможет укрепить таким образом свое положение и отвести обвинения в неудачах командования.

Между тем ход военной кампании принимал все более трагические очертания. Летом 1915 года русская армия, отступая по всему фронту, оставила всю территорию Польши, Галицию, значительную часть Прибалтики, Западной Белоруссии, Волыни. На летние месяцы 1915 года приходятся и самые тяжелые людские потери за всю войну – более 1,4 миллиона убитыми и ранеными и около миллиона пленными [1]. В этих условиях назревал вопрос об ответственности лиц высшего командования действующей армией за неудачи и о соответствующих кадровых перестановках. Замена начальника штаба Ставки генерала Янушкевича обсуждалась уже в течение длительного времени. В качестве наиболее подходящей кандидатуры на этот пост рассматривался главнокомандующий войсками Северо-Западного фронта генерал М.В. Алексеев. Однако в первых числах августа Николай II принял решение о собственном вступлении в Верховное главнокомандование.

Согласно воле императора Верховный главнокомандующий своим приказом от 19 августа назначил начальником штаба Ставки генерала М.В. Алексеева. Сам же Николай II, прибыв 23 августа в Могилев, куда Ставка была переведена из Барановичей, объявил о своем вступлении в Верховное главнокомандование. Великий князь Николай Николаевич отправлялся в качестве наместника на Кавказ. Произошедшие перемены заметно возвышали политический статус Ставки. Отныне Николай II значительно больше времени проводил в Могилеве и в поездках в войска. Обычным явлением стали визиты общественных деятелей и министров, их совещания и правительственные заседания в Ставке. Тем не менее, император не претендовал на непосредственное оперативное руководство действующей армии, и функции Верховного главнокомандующего оказались возложены на начальника штаба. Назначение М.В. Алексеева на столь ответственный пост состоялось при благосклонном отношении всех заинтересованных сторон. Думские деятели, очевидно, считали его подходящей фигурой и возлагали на него свои надежды. Еще ранее М.В. Родзянко всячески склонял Великого князя Николая Николаевича к замене начальника штаба Янушкевича, которого считал человеком В.А. Сухомлинова, М.В. Алексеевым [2]. При этом, несомненно, учитывалось участие Алексеева в контактах высших офицеров с думской комиссией по Государственной обороне в 1908–1910 годах и имевшее тогда место его знакомство с Гучковым. Император же нуждался в деятельном и грамотном помощнике во главе Ставки, желательно узком профессионале, ко-

[1] Головин Н.Н. Военные усилия России в мировой войне. С. 307.
[2] Родзянко М.В. Крушение империи. С. 124.

торый не вмешивался бы в решение политических вопросов, находясь в тени августейшего Верховного главнокомандующего.

Опыт и способности Алексеева в целом не вызывали сомнений в выдвинувшей его военной среде, а его простое происхождение и честная карьера импонировали широким кругам офицерства: «Командный состав видел в нем наиболее знающего из всех русских генералов руководителя. Армейский рядовой офицер видел в нем своего брата, вышедшего на высшие ступени иерархии исключительно благодаря личным заслугам» [1]. Такой вождь, самостоятельный и ответственный, сочетавший черты полководца и демократизм, наиболее соответствовал в тот момент общественным ожиданиям. Именно профессиональное отношение к делу, не исчерпывавшееся формальным исполнением обязанностей, а понимаемое как ответственность перед армией и страной, определили исключительно важное место генерала Алексеева в политических событиях и борьбе последующего периода.

Как и в случае с Великим князем Николаем Николаевичем, у императора имелись все основания для настороженности и ревности к своему начальнику штаба. В условиях постоянной организационной неразберихи добросовестный и активный М.В. Алексеев, даже не стремясь к тому специально, сосредоточивал в своих руках все большее влияние и возможности. Еще в октябре 1915 года проходивший службу в Ставке М.К. Лемке заметил, что все приезжающие в Могилев министры стараются попасть на прием к начальнику штаба, познакомиться с ним и установить деловые контакты. Спустя месяц он записывает в дневнике: «К нач. штаба обращаются разные высокопоставленные лица с просьбами взять на себя и то, и се, чтобы привести в порядок страну. Например, Родзянко просил его взяться за урегулирование вопроса о перевозке грузов. И постепенно, видя, что положение его крепнет, Алексеев делается смелее и входит в навязываемую ему роль особого министра с громадной компетенцией, но без портфеля» [2].

Хорошо видевший всю глубину и трагизм стоявших перед страной проблем, делавших безнадежной борьбу действующей армии на фронте, М.В. Алексеев объективно оказывался близким к точке зрения либеральной оппозиции, критиковавшей правительство и царское окружение. А.И. Деникин передает со слов Алексеева, что в ходе своих докладов императору тот неоднократно пытался указать на тревожное положение в обществе, государственном управлении, экономике. Касался он при этом и самых острых вопросов, поднимавшихся либеральными кругами, – роли Распутина при дворе и необходимости образования ответственного министерства, что неизменно вызывало неудовольствие государя. Рискуя расположением императрицы, Алексеев твердо отказал Александре Федоровне в посещении Ставки Распутиным, что в дальнейшем обусловило ее крайне подозрительное к нему отношение [3].

Тем не менее, взгляды и интересы М.В. Алексеева, представлявшего наиболее прагматичную часть военно-профессиональной элиты, нельзя считать

[1] Головин Н.Н. Военные усилия России в мировой войне. С. 321.
[2] Лемке М.К. 250 дней в царской ставке. С.280.
[3] Деникин А.И. Очерки русской смуты. Т. 1. М., 1991. С. 104–105.

совпадавшими с взглядами и интересами либералов, для которых пикировка с царизмом преследовала цели борьбы за влияние и власть. Оппозиция военных определялась тем, что в условиях слабой и деградирующей государственной власти невозможным представлялось исполнение ими своих профессиональных задач – не только успешного ведения войны, но хотя бы сохранения вооруженных сил страны в относительно дееспособном состоянии. О тревожном настроении Алексеева свидетельствуют его высказывания, приводимые Лемке. М.В. Алексеев видит положение катастрофическим и не пытается скрывать собственного пессимизма по этому поводу, но не отказывается и от усилий, с тем чтобы как-то исправить ситуацию: «С такой армией, в ее целом, можно только погибать. И вся задача командования – свести эту гибель возможно к меньшему позору… Будущее страшно, а мы должны сидеть сложа руки и только ждать, когда же все начнет валиться. А валиться будет бурно, стихийно…» [1]. Взгляды Алексеева на грядущую революцию достаточно типичны для него как представителя высших государственных кругов и офицерства. Он не видит за революцией никакой позитивной перспективы: «Россия кончит прахом, оглянется, встанет на все свои четыре медвежьи лапы и пойдет ломить… Все полетит, все будет разрушено, все самое дорогое и ценное признается вздором и тряпками» [2]. Слова начальника штаба Ставки свидетельствуют не только о его критическом настрое и разочаровании в существующем государственном порядке, ведущем Россию к военному поражению и социальной катастрофе, в них он показывает себя самостоятельным политиком, способным независимо анализировать, а главное – независимо действовать.

На фоне прогрессировавших хозяйственных трудностей, более чем явно отражавшихся на снабжении фронта, а стало быть, на боевых и моральных качествах войск, в среде высшего военного командования закономерно складывалось убеждение в необходимости не просто мобилизации промышленности, но и наведении в тылу порядка, отвечающего требованиям военного времени. Соответствующие шаги подразумевали бы усиление роли военных в управлении различными сферами жизни страны. В конце мая – начале июня 1916 года начальник Главного артиллерийского управления генерал А.А. Маниковский обратился к начальнику управления полевого генерал-инспектора артиллерии при Верховном главнокомандующем генералу Е.З. Барсукову с письмом, в котором указывал на то, что поддержание достигнутого уровня работы военной промышленности и решение задач артиллерийского снабжения действующей армии возможно лишь путем принятия особых мер по укреплению власти в тылу [3].

Изложенные в письме сведения и мнения легли в основу доклада, представленного М.В. Алексеевым 15 июня 1916 года на высочайшее имя. В докладе приводились данные о состоянии военного производства, связанных с ним отраслей и транспорта, выполнении военных заказов за рубежом. Особая озабо-

---

[1] Лемке М.К. 250 дней в царской ставке. Т. 2. С. 417.

[2] Там же.

[3] Флоринский М.Ф. Кризис государственного управления в России в годы Первой мировой войны: Совет министров в 1914–1917 гг. Л., 1988. С. 128.

ченность высказывалась по поводу положения в рабочей среде, но пока лишь в связи с ущербом, наносимым производству забастовочным движением. В целом ситуация характеризовалась Алексеевым как предкризисная, требующая немедленных исключительных мер по ее преодолению и в первую очередь милитаризации заводов, работающих на оборону. В качестве ключевого условия их реализации предлагалось введение поста «верховного министра государственной обороны», назначаемого императором, подотчетного только императору и наделенного фактически диктаторскими полномочиями. В тексте доклада говорилось: «Как на театре военных действий вся власть сосредоточивается у Верховного главнокомандующего, так и во всех внутренних областях империи, составляющих в целом глубокий тыл, работающий на действующую армию, власть должна быть объединена в руках одного полномочного лица, которое возможно было бы именовать верховным министром государственной обороны. Лицу этому… необходимо предоставить: объединять, руководить и направлять единой волей деятельность всех министерств, государственных и общественных учреждений, находящихся вне пределов театра военных действий… Повеления… верховного министра государственной обороны должны исполняться внутри империи всеми без изъятия правительственными местами и общественными учреждениями, а равно должностными лицами всех ведомств и всем населением…» [1].

В связи с тем, насколько значимой для страны представлялась фигура верховного министра государственной обороны в случае принятия предложений М.В. Алексеева императором, исследователей особо занимала гипотетическая проблема выбора кандидата на этот пост. М.Ф. Флоринский полагал, что это мог быть сам Алексеев или человек из его окружения. С ним в принципе согласен О.Р. Айрапетов, замечая, однако, что среди близких к Алексееву людей трудно выделить кандидатуру соответствующих знаний и способностей [2].

Вне зависимости от того, примерял Алексеев роль диктатора на себя или нет, его проект демонстрировал наличие у военных самостоятельных позиций по внутриполитическим вопросам и серьезных претензий на участие в государственном управлении. Изначально исходивший от «военной партии», план Алексеева отражал ее видение обстановки, ее представления о методах разрешения проблем, преследовал ее интересы, а потому был обречен на сопротивление всех политических сил, чьи амбиции и интересы он так или иначе мог затронуть. М.В. Родзянко, получивший текст доклада в Петербурге из рук А.А. Маниковского, был практически уверен, что пост верховного министра государственной обороны планировался под кандидатуру Великого князя Сергея Михайловича, который как бывший начальник Главного артиллерийского управления и генерал-инспектор артиллерии являлся одним из главных объектов думской критики. Понимал Родзянко, конечно, и то, что в случае введения диктатуры положение Думы окажется весьма неопределенным. С намерением противостоять реа-

[1] Дневники и документы из личного архива Николая II. Минск, 2003. С. 340.

[2] Флоринский М.Ф. Кризис государственного управления в России в годы Первой мировой войны: Совет министров в 1914–1917 гг. С. 130–131 ; Айрапетов О.Р. Генералы, либералы и предприниматели. С. 177.

лизации предложений Алексеева Родзянко 24 июня прибыл в Ставку. Глава Думы, беседуя с ним, а затем и с Николаем II, настаивал, что проблемы тыла автоматически разрешатся с созывом «ответственного министерства» при условии расширения полномочий его председателя. Будучи настроен серьезно, Родзянко оставил для царя и более весомый аргумент: «...учреждение диктатуры не достигло бы цели и в то же время умаляло бы царскую власть» [1].

М.В. Алексеев не мог рассчитывать и на поддержку премьер-министра Б.В. Штюрмера, так как его план фактически был направлен на ограничение полномочий правительства и самого главы кабинета. Николай II, как обычно испытывавший колебания перед ответственным выбором, не решился на то, чтобы явно обозначить собственное предпочтение. Комплекс мер, изложенных в докладе Алексеева, был вынесен на обсуждение совещания Совета министров, проходившего в Ставке 28 июня 1916 года, и был отклонен большинством министров. В принципе же идея мобилизации промышленности не была отвергнута, но ее проведение правительство намеревалось осуществлять самостоятельно в рамках законодательства. В этом случае сам Алексеев и находившаяся в его руках Ставка не являлись добросовестными партнерами правительства и превращались в его конкурентов, а возможно и врагов.

Вероятно, в связи с этими событиями М.В. Алексеев окончательно разочаровался в возможности конструктивно сотрудничать с правительством и в дальнейшем не скрывал собственного к нему отношения. Получавшая сведения об этом из уст главы кабинета Б.В. Штюрмера императрица Александра Федоровна постоянно «информирует» Николая II о настроениях и поведении начальника его штаба: «Алексеев не считается с Штюрмером, он прекрасно дал почувствовать это остальным министрам…» [2]; «…Все министры чувствуют антагонизм с его стороны…» [3]. Такая позиция Алексеева формально сближала его с лагерем либеральной оппозиции. И хотя проект диктатуры в алексеевской редакции не мог устраивать либеральную оппозицию, его неудача, а также все более жесткая позиция военных в отношении правительства формировали в среде общественности и властей убеждение в том, что Ставка и лично Алексеев являются их надежными союзниками в политической борьбе. Характеризуя обстановку политического противостояния, сложившуюся к концу 1916 года, дворцовый комендант генерал В.Н. Воейков, чье мнение отражает взгляды придворных кругов, называл пять центров оппозиции самодержавной власти, по его выражению, центров «революционного брожения»: 1) Государственную думу во главе с М.В. Родзянко; 2) Земский союз во главе с князем Г.Е. Львовым; 3) Городской союз во главе с М.В. Челноковым; 4) Центральный военно-промышленный комитет во главе с А.И. Гучковым; 5) Ставку во главе с М.В. Алексеевым [4]. Связи Алексеева с лидерами оппозиции – действительные или мнимые – вызывали особую озабоченность императрицы, которая узнавала о них от более или менее

[1] Родзянко М.В. Крушение империи. С. 162.
[2] Переписка Николая и Александры Романовых. Т. 4 : 1916. С. 420.
[3] Там же. Т. 5 : 1916–1917. С. 48.
[4] Воейков В.Н. С царем и без царя. С. 175.

ответственных информаторов и неизменно пыталась ориентировать соответствующим образом Николая II: «Надо изолировать Алексеева от Гучкова, от этого скверного, коварного влияния» [1]; «…Не позволяй славному Алексееву вступать в союз с Гучковым…» [2].

Почти немыслимые и предосудительные в мирное время, но неизбежные в ходе войны разного рода контакты представителей военного командования с общественными деятелями постепенно развивали подозрения в лагере власти. Вопрос об их обоснованности, иными словами, о существовании заговора либералов и военных с целью осуществления дворцового переворота или прямого захвата власти не раз привлекал внимание как мемуаристов, так и исследователей. Сведения о подобном заговоре так или иначе преподносятся в литературе в виде совокупности свидетельств, более или менее удачно увязываемых между собой. Общепринятым во взглядах на эту проблему следует считать мнение, согласно которому в течение 1916 – начала 1917 года в кругах либеральной оппозиции, ведущее положение в которых принадлежало думскому «Прогрессивному блоку» и тесно с ними связанных руководящих органов Земгора и Центрального военно-промышленного комитета вынашивались планы насильственных изменений государственной власти и самого порядка правления. Самым энергичным и последовательным их вдохновителем являлся А.И. Гучков, а наиболее осведомленными его сподвижниками следует считать М.И. Терещенко и Н.В. Некрасова, самостоятельную активность развивал Г.Е. Львов. Планы эти усиленно обсуждались, но, очевидно, не получили четких очертаний, поскольку участники были далеки от единства. Целью переворота должно было стать установление конституционного строя при «ответственном министерстве», сформированном из представителей цензовой общественности. Лица, стоявшие во главе оппозиции, хотя и не являлись противниками монархии в принципе, смирились с мыслью, что реализация их планов потребовала бы устранения с престола Николая II. Заговор в случае его оформления приобретал довольно сложную конфигурацию, так как немыслим был без поддержки со стороны вооруженных сил, аппарата государственного управления, а отчасти и придворных кругов. В связи с этим особый интерес представляют роль и место военных в строившемся заговоре, их реальные интересы и намерения.

Более чем двухлетний опыт службы на высших командных и штабных постах в действующей армии окончательно лишил М.В. Алексеева надежд на то, что работа правительства в существующем виде и взаимодействие с ним военных структур будут, наконец, налажены. Однако, будучи человеком, стоящим исключительно на государственных позициях, Алексеев не питал иллюзий и по поводу деятельности общественных организаций. Ориентируя главнокомандующих в отношении активности руководства Земгора, он писал: «...в различных организациях мы имеем не только сотрудников в ведении войны, но получающие нашими трудами и казенными деньгами внутреннюю спайку силы,

[1] Переписка Николая и Александры Романовых. Т. 5 : 1916–1917. С. 48.
[2] Там же. С. 43.

преследующие весьма вредные для жизни государства цели» [1]. Неслучайно М.В. Родзянко, интуитивно уловивший в алексеевском проекте диктатуры опасность для себя, уже после Февраля предостерегал Г.Е. Львова: «Ген. Алексеев всегда считал, что армия должна командовать над тылом, что армия должна командовать над волею народа и что армия должна как бы возглавлять собою и правительство, и все его мероприятия» [2].

Особое значение для данной проблемы приобретает вопрос об истинном отношении, то есть о лояльности генерала Алексеева к своему августейшему шефу – Николаю II. Учитывая такие, признаваемые всеми за ним качества, как осторожность и основательность в делах, выводы по этому поводу удается строить на основе очень сдержанных шагов и высказываний Алексеева, зафиксированных, как правило, впоследствии.

Свидетельства А.И. Деникина дают основания считать, что Алексеев разделял по крайней мере мнение о вредном влиянии императрицы Александры Федоровны на царя [3]. Все попытки воздействовать на него со стороны членов высочайшей фамилии, общественных деятелей, военных ни к чему не приводили. Очевидным становилось, что это пагубное влияние на все сферы государственного управления было неустранимо при сохранении Николаем II своего положения во главе страны и армии в ходе войны. О.Р. Айрапетовым обнаружен и приводится один из рукописных материалов из архива Алексеева, в котором генерал дает уничтожающие характеристики императору как человеку и государственному деятелю. Документ завершает резюме, уяснить значение которого можно лишь усвоив особую выдержанную манеру высказываний автора. «Началась полоса поражений… Становилось ясно, что не только потерпело банкротство данное правительство, но что разлагается само *государство*… Тем бесспорно, что *обычными* средствами помочь нельзя» (курсив мой. – И.Г.) [4]. Так, сам Алексеев и шедшее за ним большинство генералитета уже не являлись надежной опорой царизма, но лишь самые энергичные в состоянии были самостоятельно искать выходы из тревожной ситуации. Раздражение в отношении гражданских властей господствовало в настроениях Ставки и командования, отражая как конкретное состояние дел, так и общую атмосферу взаимной критики и упреков, царившую во взаимоотношениях государственных и общественных институтов. В военных кругах, таким образом, складывалось представление о том, что армия остается единственной силой, способной разрешить стоящие перед страной проблемы.

Внимательно следивший за всем происходящим в Ставке М.К. Лемке, фиксирует в дневнике 28 октября 1915 года казалось бы малопримечательное событие: «Был сегодня генерал-майор Александр Михайлович Крымов, командир Уссурийской казачьей бригады. Человек большого роста и грузной ком-

[1] Красный архив. 1923. № 4. С. 423–424.

[2] Ген. Алексеев и Времен. Комитет Государственной Думы // Красный архив. 1922. № 2. С. 284.

[3] Деникин А.И. Очерки русской смуты. Т. 1. С. 87, 104–105.

[4] Цит. по: Айрапетов О.Р. Генералы, либералы и предприниматели. С. 203.

плекции; говорят очень умный, дельный и ловкий. Алексеев относится к нему очень тепло и долго с ним беседовал у себя в кабинете» [1]. Некоторое недоумение в этом может вызвать лишь внимание, которое начальник штаба Верховного главнокомандующего уделяет генералу Крымову, человеку несравненно более молодому и младшему в чине и положении. Определенную близость этих людей мог бы объяснить тот эпизод их довоенной жизни и службы, когда оба принимали участие в группе «младотурок», обсуждавшей планы военной реформы с видными думцами, возглавляемыми А.И. Гучковым. Месяц спустя Лемке записывает: «Вчера Пустовойтенко сказал мне: «Я уверен, что в конце концов Алексеев будет просто диктатором». Не думаю, чтобы это было обронено так себе. Очевидно, что-то зреет, что-то дает основание предполагать такой исход... Недаром есть такие приезжающие, о цели появления которых ничего не удается узнать, а часто даже и фамилий их не установишь... Да, около Алексеева есть несколько человек, которые исполнят каждое его приказание, включительно до ареста в могилевском дворце... Имею основание думать, что Алексеев долго не выдержит своей роли около набитого дурака и мерзавца; что у него есть что-то, связывающее его с генералом Крымовым именно на почве политической, хотя и очень скрываемой деятельности» [2].

Делая столь смелые заявления, М.К. Лемке явно склонен был выдавать желаемое за действительность. Дальнейшие события показали, что, будучи в принципе в курсе планов государственного переворота, лица высшего военного командования так и не пошли на непосредственное участие в нем, ограничившись пассивной оппозицией. А.И. Гучков и его эмиссары усиленно искали контактов с представителями командования, совершая поездки на фронт. Еще в январе 1916 года в Ставке у М.В. Алексеева побывали лидеры Земгора Г.Е. Львов и М.В. Челноков. Самому Гучкову удалось встретиться с Алексеевым в ноябре 1916 года в Крыму, где тот в течение четырех месяцев находился на лечении. А.И. Деникин, со слов самого М.В. Алексеева, сообщает, что тот категорически протестовал против планов переворота, который мог бы в тех условиях только повредить армии и фронту. В данном случае достойно внимания, что Алексеев, отстаивая интересы армии, в принципе безучастен к судьбе императора и монархии. Одновременно он был уверен, что представители заговорщиков имели вполне конструктивные контакты с А.А. Брусиловым и Н.В. Рузским [3]. По иным свидетельствам, Алексеев отказал Гучкову в прямой поддержке, но одновременно дал понять, что его планам противодействовать не будет [4]. По этой причине представляется справедливым мнение Гучкова о роли Алексеева в готовившемся заговоре: «он был настолько осведомлен, что делался косвенным участником» [5].

[1] Лемке М.К. 250 дней в царской ставке. Т. 1. С. 251.
[2] Лемке М.К. 250 дней в царской ставке. С. 282.
[3] Деникин А.И. Очерки русской смуты. Т. 1. С. 107–108.
[4] Воейков В.Н. С царем и без царя. С. 187.
[5] Александр Иванович Гучков рассказывает… Воспоминания Председателя Государственной думы и военного министра Временного правительства. М., 1993. С. 9.

Впоследствии в письме к С.П. Мельгунову А.И. Гучков скромно оценивал результаты всех усилий по привлечению верхов армии на свою сторону: «Сделано было много для того, чтобы быть повешенным, но мало для реального осуществления, ибо никого из крупных военных к заговору привлечь не удалось» [1].

Подробности так и не получившего реализации плана стали известны генералу П.А. Половцову со слов А.И. Гучкова весной 1917 года. «Предполагалось уговорить царя поочередно приводить гвардейские кавалерийские полки в столицу на отдых и для поддержания порядка, а затем выманить Царя из Ставки и при помощи кавалергардов совершить дворцовый переворот, добившись отречения в пользу цесаревича и регентства. Все это должно было произойти в середине марта» [2]. Задуманный словно в духе XVIII века сюжет косвенно подтверждает отсутствие среди заговорщиков представителей высшего командования. Переворот должен был осуществиться группой гвардейских офицеров без активного участия крупных военачальников, но становился возможным только с их молчаливого одобрения и при полной беззащитности императора.

На фоне сведений об этих планах, активности деятелей либерального лагеря и их контактов с военными несколько особняком стоит фигура начальника Уссурийской конной дивизии генерала А.М. Крымова. Пользовавшийся известностью как человек сильной воли и один из самых умных и способных офицеров Генерального штаба, Крымов не скрывал своего резко негативного настроя в отношении властей. По словам его подчиненного, барона П.Н. Врангеля, начальник дивизии в беседах с ним открыто высказывался о пагубности курса правительства и необходимости устранения Николая II путем «дворцового переворота» [3]. Собственно политические взгляды Крымова и природа его оппозиционности, очевидно, сводились к тому, что как представитель «военной партии» он являлся сторонником жесткого внутреннего курса и всесторонней милитаризации жизни страны на время войны. Это отвечало взглядам Алексеева о необходимости диктаторского правления в интересах обороны, что могло стать причиной их взаимного доверия и объяснять деловые контакты. С другой стороны, Крымов был близко знаком с Гучковым и, судя по взаимным превосходным оценкам, их отношения отличались взаимопониманием [4]. Фрондерство Крымова, вероятно, для многих не являлось секретом. Лемке связывает его появления в Ставке с активностью, проявляемой руководителями военно-промышленных комитетов: «По некоторым обмолвкам Пустовойтенко мне начинает казаться, что между Гучковым, Коноваловым, Крымовым и Алексеевым зреет какая-то конспирация, какой-то заговор, которому не чужд и Михаил Саввич [Пустовойтенко], а также еще кто-то» [5].

---

[1] Мельгунов С.П. На путях к дворцовому перевороту. М., 2003. С. 148.

[2] Половцов П.А. Дни затмения (записки главнокомандующего войсками Петроградского военного округа генерала П.А. Половцова в 1917 году). М., 1999. С. 49.

[3] Врангель П.Н. Записки. Ч. 1 // Белое дело. Кавказская армия. М., 1995. С. 7.

[4] Александр Иванович Гучков рассказывает… С. 23 ; Врангель П.Н. Записки. С. 23.

[5] Лемке М.К. 250 дней в царской ставке. Т. 2. С. 278.

Свидетельства не позволяют сделать однозначный вывод о том, был ли А.М. Крымов связан с группой А.И. Гучкова, действовал ли на свой страх и риск или являлся доверенным лицом Алексеева. А.И. Гучков впоследствии категорически отрицал непосредственное участие А.М. Крымова в его планах [1]. Трудно проследить в поведении Крымова и руку Алексеева: первый, как правило, высказывался от своего имени, второй проявлял обычную осторожность как в силу собственной натуры, так и своего высокого положения. Правильным, видимо, будет считать, что Крымов, зная о взглядах Алексеева, чувствовал его поддержку. Во всяком случае, свою самую заметную акцию, которая пришлась на начало 1917 года и принесла ему известность в политических кругах, Крымов не мог координировать ни с Гучковым (тот не знал и не участвовал в ней), ни с Алексеевым (он находился на лечении в Крыму). Подробности ее известны в описании М.В. Родзянко: «С начала января приехал с фронта генерал Крымов и просил дать ему возможность неофициальным образом осветить членам Думы катастрофическое положение армии и ее настроения. У меня собрались многие из депутатов, членов Государственного совета и членов Особого совещания. С волнением слушали доклад боевого генерала… Крымов говорил, что, пока не прояснится и не очистится политический горизонт… пока не будет другого правительства, которому бы там, в армии, поверили, – не может быть надежд на победу. Войне определенно мешают в тылу, и временные успехи сводятся к нулю. Закончил Крымов приблизительно такими словами: «Настроение в армии такое, что все с радостью будут приветствовать известие о перевороте. Переворот неизбежен, и на фронте это чувствуют. Если вы решитесь на эту крайнюю меру, то мы вас поддержим. Очевидно, других средств нет. Все было испробовано как вами, так и многими другими, но вредное влияние жены сильнее честных слов, сказанных царю. Времени терять нельзя» [2].

А.М. Крымова горячо поддержали М.И. Терещенко, А.И. Шингарев, С.И. Шидловский, с ними согласились и многие думцы. М.В. Родзянко вынужден был прервать обсуждение, заявив: «…Я никогда не пойду на переворот… Если армия может добиться отречения – пусть она это делает через своих начальников, а я до последней минуты буду действовать убеждениями, но не насилием…» [3]. Тем не менее, выступление А.М. Крымова сыграло свою роль. Большинство участников совещания впервые встретились со столь радикальными настроениями представителя генералитета действующей армии, что усугубило ощущение глубины кризиса, охватившего все сферы жизни государства.

К началу 1917 года высшее командование российской армии оказалось втянутым в соперничество политических сил и группировок. Причины тому обнаруживаются как в государственно-институциональной, так и в социально-политической плоскости. С момента создания Ставки Верховного главнокомандующего не был вполне урегулирован ее статус и порядок взаимодействия со структурами гражданского управления. В условиях неудовлетворительной рабо-

[1] Мельгунов С.П. На путях к дворцовому перевороту. С. 150–151.
[2] Родзянко М.В. Крушение империи. С. 199–200.
[3] Там же. С. 200.

ты тыла деятельность Ставки и лиц, ее фактически возглавлявших, приобретала характер постоянной борьбы с правительством за интересы действующей армии, что предопределяло симпатии общественности. По мере развития военной ситуации по неблагоприятному сценарию значительная часть генералитета совершенно обоснованно приходила к осознанию того, что существующий государственно-политический режим не ведет Россию и ее армию к победе. Одновременно подобное мнение имело и глубоко субъективную подоплеку: высших военных чинов устраивала позиция, когда максимум ответственности за военные неудачи и состояние войск перекладывалось на правительство. Уже по этой причине военное командование ситуативно становилось союзником тех сил, которые стремились к переделу власти и готовили переворот в правящем лагере. Получившие известность слова Брусилова «Если придется выбирать между царем и Россией – я пойду за Россией» импонировали либеральной оппозиции. Но их патриотический пафос, в сущности, маскировал политическую беспомощность. Не являясь в принципе противником царизма, военная верхушка готова была примкнуть к любой группировке, обещавшей установить сильную власть в интересах обороны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айрапетов, О.Р. Генералы, либералы и предприниматели: работа на фронт и революцию. 1907–1917. – М., 2003.
2. Александр Иванович Гучков рассказывает… Воспоминания Председателя Государственной думы и военного министра Временного правительства. – М., 1993.
3. Воейков, В.Н. С царем и без царя: Воспоминания последнего дворцового коменданта государя императора Николая II. – Гельсингфорс, 1936.
4. Врангель, П.Н. Записки. Ч. 1 // Белое дело. Кавказская армия. – М., 1995.
5. Ген. Алексеев и Времен. комитет Государственной думы // Красный архив. – 1922. – № 2.
6. Глобачев, К.И. Правда о русской революции. Воспоминания бывшего начальника Петроградского охранного отделения. – М. : РОССПЭН, 2009.
7. Головин, Н.Н. Военные усилия России в мировой войне. – М. ; Жуковский, 2001.
8. Григорович, И.К. Воспоминания бывшего морского министра. – СПб., 1999.
9. Данилов, Ю.Н. Великий князь Николай Николаевич. – М. ; Жуковский, 2006.
10. Деникин, А.И. Очерки русской смуты. – Т. 1. – М., 1991.
11. Дневники и документы из личного архива Николая II. – Минск, 2003.
12. Дневники императора Николая II. – М., 1991.
13. Кондзеровский, П.К. В Ставке Верховного: 1914–1917. Воспоминания дежурного генерала при Верховном главнокомандующем. – Париж, 1967.
14. Красный архив. – 1923. – № 4. – С. 423–424.
15. Лемке, М.К. 250 дней в царской ставке. – Т. 1. – Минск, 2003.
16. Летопись войны. – 1914. – № 1. – С. 4.
17. Мельгунов, С.П. На путях к дворцовому перевороту. – М., 2003.
18. Переписка Николая и Александры Романовых. 1914–1915. – М. ; Л., 1923.
19. Половцов, П.А. Дни затмения (записки главнокомандующего войсками Петроградского военного округа генерала П.А. Половцова в 1917 году). – М., 1999.

20. Родзянко, М.В. Крушение империи. – Харьков, 1990.
21. Сухомлинов, В. Воспоминания. – Берлин, 1924.
22. Флоринский, М.Ф. Кризис государственного управления в России в годы Первой мировой войны: Совет министров в 1914–1917 гг. – Л., 1988.

ЛИТЕРАТУРОВЕДЕНИЕ

К.В. Алексеев

ЗАРОЖДЕНИЕ ЖАНРА РУССКОГО СОЦИАЛЬНО-ПОЛИТИЧЕСКОГО РОМАНА И ЕГО РАЗВИТИЕ В СЕРЕДИНЕ XIX ВЕКА

В статье рассматривается проблема зарождения русского социально-политического романа и его развитие в середине XIX века, формирование главных видов данного жанра (роман о «новых людях» и «антинигилистический роман»), причины их антагонизма. Дается краткий анализ произведений, относящихся к жанру социально-политического романа и написанных в 60-е – начале 70-х годов XIX века.

русский социально-политический роман, роман о «новых людях», «антинигилистический роман», революционные демократы, либеральные взгляды.

На фоне острой общественно-политической ситуации, сложившейся в России с середины 50-х годов XIX века в связи с поражением в Крымской войне, развитием революционного движения, возникновением оппозиционности даже в ближайшем окружении императора, в русской литературе получил развитие жанр романа, который вполне может называться социально-политическим, ибо главными целями авторов подобных произведений было утверждение той или иной общественно-политической позиции, а часто и четкой программы действий. Нередко романисты больше думали об идеологической стороне своих творений, от чего страдала художественность. Однако истинные мастера слова гармонично соединяли социально-политическое содержание с прекрасной художественной формой, опровергая таким образом тезис видного представителя академической науки XIX века Ф.И. Буслаева о том, что «как скоро будет замечена в романисте намеренность проводить какую-либо доктрину, тотчас подвергается сомнению его поэтический талант» [1].

Зарождение жанра социально-политического романа можно отнести к первой половине XIX века: социально-политические мотивы присутствуют

[1] Буслаев Ф.И. Мои досуги : в 2 ч. М., 1886. С. 465.

в «Евгении Онегине» А.С. Пушкина, «Герое нашего времени» М.Ю. Лермонтова, «Кто виноват?» А.И. Герцена. Жизненные истории Онегина, Печерина, Бельтова подводили читателя к главному выводу: политическое устройство России нуждается в коренном реформировании. Однако собственно социально-политический роман появился позже, в конце 1850-х годов.

В 1858 году вышел в свет роман В.И. Аскоченского «Асмодей нашего времени», ставший предтечей «антинигилистического романа» и получивший известность благодаря карикатурному изображению революционно-демократических слоев русского общества, безнравственности и атеизма. В романе «Асмодей нашего времени» разоблачается тип «лишнего» человека, «кощунствующего» под влиянием «вольтерьянства» над религиозно-нравственными основами. В произведении В.И. Аскоченского проявилась тенденция к «снижению» и «развенчанию» печоринского типа. Роман был направлен против «тлетворного воздействия скептицизма» [1] и стал в восприятии многих читателей образцом обскурантизма и мракобесия.

Консервативно-православное направление творчества В.И. Аскоченского вызывало неприятие у большей части русского образованного общества, и даже относительно умеренные деятели русской культуры в целом отрицательно оценивали деятельность писателя, хотя и отмечали его незаурядный талант. В.И. Аскоченский, с точки зрения либеральной и, тем более, революционной публики, был отъявленным «мракобесом», но, например, в православно-консервативных кругах конца XIX – начала XX века его деятельность и творчество традиционно оценивались весьма высоко. В сравнительно недавно переизданной работе известного православного публициста начала XX века С.А. Нилуса «На берегу Божьей реки» в «добром слове памяти В.И. Аскоченского» последний характеризуется как борец «за коренные устои русской жизни», как «крепкий и бестрепетный стоятель за веру православную, за царя самодержавного, за великий верою и смирением народ русский», как «подвижник русского духа». Там же Нилус иронически замечает: «Либеральные мамаши тех годов (50–70-е годы XIX века. – А.К.) именем Аскоченского детей своих пугали, как в доброе старое время няни – букой» [2].

Тем не менее, роман «Асмодей нашего времени» стал своеобразным символом обскурантизма, крайнего консерватизма и реакционности, а В.И. Аскоченский, по словам М.Н. Каткова, автором, «который служит в нашей литературе последним термином всякого обидного сравнения» [3]. Неслучайно литературный критик М.А. Антонович негативную оценку романа И.С. Тургенева «Отцы и дети» дал в одноименной с романом Аскоченского статье, тем самым дав понять, что «Отцы и дети» – такой же обскурантский роман.

Следующим крупным шагом на пути развития русского социально-политического романа стал роман И.С. Тургенева «Отцы и дети». Бурная обществен-

[1] Русские писатели. М., 1989. Т. 1. С. 118.

[2] Нилус С. На берегу Божьей реки. Изд-во Свято-Троицкой Сергиевой лавры, 1991. С. 153–154.

[3] Русский вестник. 1862. Июль. С. 23.

но-политическая борьба вокруг крестьянской реформы 1861 года, ожидание революции, хождение в народ стимулировали расцвет социально-политического романа в 60-е и 70-е годы XIX века. В этот период появилось огромное количество произведений, политическая направленность которых не оставляет сомнений.

Одним из основоположников русского социально-политического романа, как отмечалось, можно назвать И.С. Тургенева, который в «Отцах и детях» впервые со всей остротой показал общественно-политическую и экономическую ситуацию в России накануне реформы 1861 года и жесткую идеологическую борьбу демократического и либерально-дворянского лагеря. В основу расхождений между «отцами» и «детьми» в романе «полагаются не столько морально-этические, сколько социальные, общественно-политические и мировоззренческие проблемы» [1]. Автор «Отцов и детей» открыто заявлял о социально-политической цели своего произведения: «Вся моя повесть направлена против дворянства, как передового класса» [2]. С первых же строк романа Тургенев акцентирует внимание читателя на том, что события, которые разворачиваются на страницах его произведения, имеют точную датировку. Это 1859 год, бурное предреформенное время, когда все живут в ожидании грядущих перемен, все толкуют о прогрессе, все, каждый на свой лад, мечтают о нововведениях. Писатель показывает, что представители разных течений и групп русского общества осознают необходимость реформ, но расходятся в методах их проведения, причем эти расхождения имеют принципиальный и непримиримый характер. Два главных образа-антипода, выведенных в романе, – либерал-аристократ Павел Петрович Кирсанов и демократ-нигилист Евгений Васильевич Базаров – являются яркой иллюстрацией общественно-политических сил, действовавших в России накануне крестьянской реформы. Споры Павла Петровича и Базарова именно потому достигают такого сильного эмоционального накала, что герои одновременно и единомышленники, и политические оппоненты. Оба они отрицают самодержавную власть в том виде, в котором она сложилась в России. И в этом отношении Павел Петрович «нигилист» не менее Базарова. Неслучайно в первых же главах романа Павел Петрович Кирсанов демонстрирует свое хорошее знакомство с пьесой А.С. Грибоедова «Горе от ума», которую, вероятно, читал не без сочувствия, вплоть до запоминания отдельных цитат. Но в вопросе о том, что должно прийти на смену исчерпавшему себя самодержавно-крепостническому строю, Кирсанов и Базаров совершенно расходятся. Если Павел Петрович ратует за укрепление общественно-политического авторитета дворянской элиты, то Базаров, как видно из контекста романа, выступает против любых сословных и социальных привилегий.

Главный герой тургеневского романа, Евгений Васильевич Базаров, открыл целую плеяду литературных героев, называемых с легкой руки писателя «нигилистами», под которыми сам Тургенев понимал революционеров: общеиз-

[1] История русского романа : в 2 т. М. ; Л. : Наука, 1962–1964. С. 497.
[2] Тургенев И.С. Собр. соч. : в 12 т. М. : Гослитиздат, 1953. Т. 10. С. 340.

вестными стали слова Тургенева о Базарове из письма К.К. Случевскому от 14 апреля 1862 года: «...если он называется нигилистом, то надо читать: революционером» [1]. «Тургенев наделяет своего героя качествами революционера, но осложняет его внутренний мир свойствами рефлектирующей личности, страдающей от сознания одиночества» [2]. Автор романа «Отцы и дети» показывает, что одиночество нигилиста связано с развернувшимся в нем трагическим внутренним конфликтом между мертвой теорией и жизнью, в результате которого побеждает последняя. Неслучайны в этой связи примирение Павла Петровича и Базарова и философский пейзаж в финале произведения. Герою романа, осознавшему невозможность жить по теории, в которую он искренне верил, очевидно, оставалось только умереть.

Такая трактовка представителя демократического лагеря не могла удовлетворить русское общество, и в 1863 году, в крепости, Н.Г. Чернышевский пишет роман о «новых людях» «Что делать?», в котором изображает людей, способных в силу своих личностных качеств и верной, гуманной общественно-политической позиции повести российское общество вперед, к идеалам социализма. Тургеневскому типу нигилиста писатель-демократ противопоставил свои типы «новых людей».

«Писатель сделал политику предметом художественного изображения» [3], а главными героями своего произведения демократов и революционеров. В учебнике «История русской литературы XIX века» под редакцией С.М. Петрова роман Н.Г. Чернышевского справедливо трактуется как социально-политический. Автор «Что делать?» противопоставляет «лишним людям» дворянской литературы новых героев, которые не мыслят жизни без труда и, стремясь к личному счастью, не забывают об общественном благе. «Новых людей» Чернышевский пытается сделать реальными, не оторванными от жизни.

Автор романа писал: «Я хотел изобразить обыкновенных порядочных людей нового поколения, людей, которых я встречал целые сотни. Я взял троих таких людей: Веру Павловну, Лопухова, Кирсанова. Такими обыкновенными людьми я их считаю, сами они считают себя, считают их все их знакомые, – то есть такие же люди, как они… Да, мне хотелось показать людей, действующих как все обыкновенные люди их типа, и надеюсь, мне удалось достичь этого» [4].

Объективную обусловленность и необходимость появления таких людей писатель-демократ доказывает, изображая социальные отношения дворянско-буржуазного общества, в котором либо бессмысленно прожигается жизнь равнодушными ко всему на свете дворянскими отпрысками (Сторешниковы и Розальские), либо царит стяжательство (Полозов).

Особое место в романе «Что делать?» занимает образ Рахметова, которому Н.Г. Чернышевский придавал большое значение: «Не покажи я фигуру Рахмето-

[1] Тургенев И.С. Собр. соч. Т. 10. С. 340.

[2] История русского романа. Т. 1. С. 508.

[3] История русской литературы XIX века : в 2 т. / под ред. С.М. Петрова. М. : Учпедгиз, 1963. Т. 2. С. 120.

[4] Чернышевский Н.Г. Полн. собр. соч. : в 15 т. М. : Гослитиздат, 1939–1949. Т. 11. С. 227.

ва, большинство читателей сбилось бы с толку насчет главных действующих лиц моего рассказа. Я держу пари, что до последних отделов этой главы Вера Павловна, Кирсанов, Лопухов казались большинству публики героями, лицами высшей натуры, пожалуй, даже лицами идеализированными, пожалуй, даже лицами невозможными в действительности по слишком высокому благородству» [1].

Рахметова можно считать главным героем романа Н.Г. Чернышевского. Это человек, личные интересы которого полностью подчинены общественным. Выходец из старинного дворянского рода, он порывает со своим классом и готовит себя к революции.

Н.Г. Чернышевский не ограничивается изображением «новых людей»; он рисует картины грядущего социалистического общества, напоминающие творения Т. Мора и Т. Кампанеллы, А. Сен-Симона и Ш. Фурье. И, наконец, писатель через изображение деятельности Веры Павловны, Лопухова и Кирсанова указывает путь, который, по его мнению, приведет к достижению социалистического идеала: создание коммун, подобных мастерской Веры Павловны; построение общественных отношений на основе теории «разумного эгоизма».

Помимо утопичности картин светлого будущего, повествование Н.Г. Чернышевского часто противоречило существующим реалиям и служило средством пропаганды социалистических идей: идеализация «новых людей» и «особенного человека», фантастичность предприятия Веры Павловны. Последнее признавал сам автор в первоначальном варианте романа: «Есть в рассказе еще одна черта, придуманная мною… На самом деле Вера Павловна хлопотала над устройством не мастерской; и таких мастерских, какую я описал, я не знал: их нет в нашем любезном отечестве» [2].

Рассматривая роман Н.Г. Чернышевского «Что делать?», необходимо отдельно остановиться на образе Веры Павловны. Писатель-демократ продолжает традиции, заложенные И.С. Тургеневым в романах «Рудин», «Дворянское гнездо», «Накануне»: потеряв Рудина, Наташа «опускается на дно» прежней жизни, лишившись Лаврецкого, Лиза уходит в монастырь, а Елена Стахова после смерти Инсарова выбирает для себя путь самостоятельной борьбы за свободу. Н.Г. Чернышевский создает образ женщины, которая видит счастье в общественной деятельности, стремится к эмансипации, выраженной не только в свободе чувств, но и в достижении общественного равноправия с мужчиной. Благодаря прогрессивным, с точки зрения автора романа, взглядам Лопухова и Кирсанова, Вера Павловна смогла вырваться из чуждой ей атмосферы родной семьи. Фиктивный брак как возможность освобождения девушки от семейной кабалы широко использовался в демократической среде, по свидетельству общественного деятеля, социалиста Н. Шелгунова [3], поэтому данное явление отражено Н.Г. Чернышевским в соответствии с реалиями времени. Только в обществе революционных демократов смогла Вера Павловна, как показывает писатель, в полной мере раскрыть свой интеллектуальный, творческий и нравственный

[1] Чернышевский Н.Г. Полн. собр. соч. Т. 11. С. 228.
[2] Там же. Т. 3. С. 638.
[3] Шелгунов Н. Воспоминания. М. ; Пг. : ГИЗ, 1923. С. 116.

потенциал. Этим Чернышевский подчеркивал прогрессивную роль революционно-демократической теории и практики.

После появления «Отцов и детей» и «Что делать?» русская литература достаточно четко разделилась на два основных направления – революционно-демократическое и либерально-консервативное, под знаком непримиримой борьбы которых прошли 60-е и отчасти 70-е годы.

Роман Н.Г. Чернышевского «Что делать?» стимулировал появление серии произведений о «новых людях»: «Степан Рулев» (1864) Н.Ф. Бажина; «Трудное время» (1865) В.А. Слепцова; «Гнилые болота, история без героя» (1864) и «Жизнь Щупова, его родных и знакомых» (1865) А.К. Шеллера-Михайлова; «Новые люди» (1867) и «Знамения времени» (1869) Д.Л. Мордовцева; «Шаг за шагом» (1870) И.В. Омулевского; «Николай Негорев, или Благополучный россиянин» (1871) И.А. Кущевского и др. Все эти романы по-разному изображали «новых людей», но большинство из них создавалось под влиянием Чернышевского.

Заметным произведением о «новых людях» стал социально-политический роман В.А. Слепцова «Трудное время», опубликованный в период реакции. В центре повествования революционер Рязанов, освобождающий Марию Николаевну от иллюзий, разоблачающий эгоистическое отношение Щетинина к крестьянам. В результате пропаганды Рязанова следует разрыв Марии Николаевны с семьей и со средой, в которой она жила.

Н.Ф. Бажин в романе «Степан Рулев», продолжая рахметовскую тему (Рулева, как и «особенного человека» Чернышевского, отличает титанизм), попытался в условиях наступившей реакции показать конкретную деятельность революционера. В условиях цензуры писатель мог сделать это лишь в форме намеков: о революционности Рулева говорит то, что он стремился быть там, где назревало возмущение, происходили «возмутительные истории».

Такую же задачу решает в романе «Шаг за шагом» И.В. Омулевский. Кроме этого, писатель показывает преемственность, единство революционных поколений России: герой романа Александр Светлов участвует в кружке декабриста Жилинского и участников польского движения, поддерживает отношения с политическими ссыльными. Образ Светлова в романе Омулевского в отличие от Рахметова лишен аскетизма, необычности; автор изобразил его «простые человеческие черты», как это собирался сделать Чернышевский в нереализованном продолжении романа «Что делать?». Еще одной особенностью главного героя романа «Шаг за шагом» является сравнение им революционера с Христом, а революции с осуществлением на практике великих христианских истин. Светлов говорит Прозоровой, обратившейся после этого к Евангелию, что «каждый мужчина может сделать то, что сделал Христос: может страдать и умереть, как он, отстаивая на практике великие христианские истины» [1].

[1] Омулевский И.В. Шаг за шагом. Иркутск : Иркут. кн. изд-во, 1953. С. 200, 207.

Романам «Степан Рулев», «Шаг за шагом», как и роману Н.Г. Чернышевского «Что делать?», свойственна идеализация героев, что служило средством пропаганды «новых людей» в широких читательских кругах.

Несколько иной взгляд присущ произведениям А.К. Шеллера-Михайлова и Д.Л. Мордовцева. А.К. Шеллер-Михайлов придавал своим героям более умеренные по сравнению с революционными взгляды и говорил о постепенном, мирном совершенствовании жизни. В его романах нет понятия «новые люди»; он говорит о «светлых образах», о «хороших, простых людях», которые должны приносить «посильную пользу себе и ближним». Характерен образ из романа «Гнилые болота, история без героя»учителя-разночинца Носовича, под влиянием которого сложилось поколение молодых людей, действующих на поприще «малых дел»,. «Общество не любит великих подвигов, если они не удаются», – приходит к выводу автор записок, от лица которого ведется повествование [1]. Герои романов А.К. Шеллера-Михайлова, по замечанию М.Е. Салтыкова-Щедрина, отделываются «разговорным негодованием». Таким образом, А. Шеллер-Михайлов внес в свои произведения сильную либеральную тенденцию, не свойственную большинству романов о «новых людях».

Д.Л. Мордовцев в повести «Новые люди» и в романе «Знамения времени» наделил «новых людей» чертами «лишнего человека». М.Е. Салтыков-Щедрин считал недопустимым такое смешение свойств и признаков ветхого «тургеневского» человека со свойствами и признаками искомого «нового человека»; положение героев Д. Мордовцева он назвал «расковыриванием собственных болячек» [2].

Отсутствие в произведениях о разночинцах историй их духовного формирования обусловило появление романов, повествующих о становлении представителей разночинной интеллигенции. Одним из первых произведений такого рода стал роман Н.Г. Помяловского «Мещанское счастье», в котором любовная интрига становится побочной, а в основе сюжета лежит социальный конфликт. Подслушанный Молотовым разговор супругов Обросимовых о нем становится концом иллюзий разночинца и началом перелома в самосознании и жизни героя, обусловившего поиски своего независимого пути в жизни.

Художественный метод изображения разночинца, разработанный Н.Г. Помяловским, был использован и обогащен Н.А. Благовещенским и И.А. Кущевским.

В романе «Перед рассветом» Н.А. Благовещенский помимо детального исследования биографии главного героя Трепетова изображает историю его жизни на фоне типических исторических обстоятельств. Образ ожидаемого рассвета в романе связан с основной идеей статьи Н.А. Добролюбова «Когда же придет настоящий день?».

Историю становления характеров и идей разночинцев положил в основу своего романа «Николай Негорев, или Благополучный россиянин» И.А. Кущев-

[1] Шеллер-Михайлов А.К. Полн. собр. соч. СПб., 1904. Т. 2. С. 204.

[2] Щедрин Н. (М.Е. Салтыков). Полн. собр. соч. М. : Гослитиздат, 1937. Т. 8. С. 396.

ский. Автор подробно описывает условия воспитания и образования своих героев, общественно-политическую обстановку в России 1850-х – начала 1860-х годов, процесс размежевания революционно-демократической и либеральной тенденций. Крестьянские волнения после реформы 1861 года окончательно определяют судьбы героев: Андрей Негорев, Оверин, Софья Васильевна рассчитывают на народное восстание, участвуют в тайном обществе, другой путь выбирает Николай Негорев, считая более выгодным «быть благонамеренным гражданином» [1].

Таким образом, Н.Г. Помяловский, Н.А. Благовещенский, И.А. Кущевский создали романы об истории жизни «негероического» разночинца в конкретных исторических условиях. Однако общественно-политическая функция этих произведений «была не менее важна, чем функция программно-пропагандистского романа» [2], а значит их вполне можно отнести к социально-политическим романам.

В ответ на проведение демократами в художественной литературе революционных идей писателями либерального круга был создан целый ряд социально-политических романов, получивших в отечественном литературоведении название «антинигилистическая беллетристика», три волны которой выделяются в академической работе «История русского романа»:

1) начало – середина 60-х годов XIX века (А. Писемский «Взбаламученное море» (1863), Н. Лесков «Некуда» (1864), В. Клюшников «Марево» (1864), В. Авенариус «Бродящие силы» (дилогия: повести «Современная идиллия» (1865) и «Поветрие» (1867));
2) с конца 1860-х до конца 70-х годов (Н. Лесков «На ножах» (1870–1871), В. Крестовский «Кровавый пуф» (дилогия) (1869–1874), Б. Маркевич «Марина из Алого Рога» (1873), В. Мещерский «Тайны современного Петербурга» (1876–1877), Ф. Достоевский «Бесы» (1871) и др.);
3) конец 1870-х годов – 1885 год (Б. Маркевич «Перелом» (1880–1881), «Бездна» (1883–1884), В. Авсеенко «Злой дух» (1881–1883), К. Орловский «Вне колеи» (1882) и др.).

М. Горький в одной из записок к Н.К. Крупской называл эту беллетристику контрреволюционной [3], и это определение вполне справедливо, ибо все содержание антинигилистических романов направлено прежде всего против революционного пути развития России. В воспоминаниях о П. Якушкине Н.С. Лесков, автор двух антинигилистических романов, писал: «В литературе последовал великий раскол: из одного лагеря, с одним общим направлением к добру, образовались две партии: «постепеновцев» и «нетерпеливцев»… Я тогда остался с «постепеновцами», умеренность которых казалась мне более надежною» [4]. Из этих слов писателя следует, что, во-первых, и сторонники, и противники ре-

[1] Кущевский И. Николай Негорев, или Благополучный россиянин. М. : Гослитиздат, 1958. С. 241.

[2] История русского романа. Т. 2. С. 41.

[3] Львов-Рогачевский В. Поворотное время // Современный мир. 1911.

[4] Лесков Н.С. Сочинения Павла Якушкина. СПб., 1884. С. 50.

волюции в России стремились к добру, а во-вторых, причина неприятия революционного пути развития страны – в излишней радикальности этого пути в глазах так называемых «постепеновцев». Далеко не последнюю роль играли мировоззренческие позиции романистов разных лагерей, о чем будет сказано ниже.

Наиболее заметными писателями, выступившими на страницах своих произведений против социалистических и революционных идей, были А.Ф. Писемский («Взбаламученное море»), В.В. Крестовский («Кровавый пуф»), В.П. Клюшников («Марево»). Кроме этих писателей «второго эшелона», свое отрицательное отношение к революционному движению выразили Ф.М. Достоевский («Бесы»), Н.С. Лесков («Некуда», «На ножах»), отчасти И.А. Гончаров («Обрыв»).

В недавнем прошлом антинигилистические произведения отвергались с порога, а такие авторы, как В.В. Крестовский и В.П. Клюшников, считались реакционерами. Сложнее обстояло дело с признанными гениями русской и мировой литературы А.Ф. Писемским, Ф.М. Достоевским, Н.С. Лесковым, И.А. Гончаровым: авторы «Взбаламученного моря», «Бесов», «Некуда», «На ножах», «Обрыва» объявлялись жертвами трагических ошибок и заблуждений. Так или иначе, на протяжении многих лет считалось, что «авторы антинигилистической романистики оклеветали русского революционера» [1]. Между тем именно эти писатели, не отразившие современную им действительность в духе господствовавших в то время настроений, если и сгустили краски, тенденциозно изобразив революционных деятелей, а точнее, заострив внимание на другой, негативной, стороне революционного движения, во многом сумели предугадать страшные последствия революционного развития страны, обусловленные именно этой негативной стороной.

В свое время В.И. Ленин указывал на схематизм антинигилистических произведений с «описанием благородных предводителей дворянства, благодушных и довольных мужичков, недовольных извергов, негодяев и чудовищ-революционеров» [2]. Н.И. Пруцков, соглашаясь с Лениным, утверждает, что эти произведения построены по одному шаблону, и дополняет: «Можно было бы для полноты картины добавить, что «изверги-революционеры» не имеют опоры в народе, национальной почвы в России, они «висят в воздухе», а проповедуемые ими идеи являются лишь модой или заблуждением и гибельным увлечением («обрывом» и «бездной», «маревом» и «дымом») [3]. Однако необходимо заметить, что М.Е. Салтыков-Щедрин, например, в статье «Напрасные опасения» [4] авторов романов о «новых людях» упрекал в схематизме, отрыве от реальной жизни, преувеличении роли необыкновенной личности. Однако это мнение писателя и критика революционно-демократического лагеря не очень охотно упоминалось в литературоведении.

[1] История русской литературы XIX века. Т. 2. С. 60.
[2] Ленин В.И. Полн. собр. соч. Т. 18. С. 289.
[3] История русской литературы XIX века. С. 61.
[4] Щедрин Н. (М.Е. Салтыков). Полн. собр. соч. Т. 7.

Таким образом, можно говорить о том, что представители революционного движения в России и литературные критики демократического лагеря, а также советские литературоведы отказывали антинигилистическим произведениям в художественности и правдивости, а их авторам в таланте (интересно отметить, что теперь нередко можно встретить диаметрально противоположное мнение, согласно которому романы революционных демократов, особенно Н.Г. Чернышевского, якобы примитивны и не имеют никакой художественной ценности). Помимо уже приведенных мнений В.И. Ленина и Н.И. Пруцкова, можно упомянуть и о высказываниях других общественных и литературных деятелей.

В статье «Перлы и адаманты русской журналистики» критик В.А. Зайцев, акцентируя внимание на романе Н.С. Лескова «Некуда», писал: «Изумление читателя вот уже второй год постоянно возрастает. При «Взбаламученном море» казалось, что гаже уже нельзя будет выдумать. Вышло «Марево». Но в «Мареве» даже гадость имеет хотя какое-нибудь прикрытие: берутся небывалые личности, которые автор усиливается возвести в типы. А тут вдруг является чудище, которое уж совершенно со всякого толка сбивает: читаешь и не веришь глазам, просто зги не видно. В сущности это просто плохо подслушанные сплетни, перенесенные в литературу» [1].

Еще более жестко о романе «Некуда» отозвался М.Е. Салтыков-Щедрин: «Тотчас по выходе в свет он возбудил в публике междоусобие: одни стали говорить, что роман списан с натуры и что поэтому он имеет громадное обличительное значение; другие же утверждали, что это вовсе и не роман, а просто сбор разных сплетен, следовательно, он и значения никакого иметь не может… и впоследствии – литературная критика относилась к роману «Некуда» совершенно безучастно и ни разу не удостоила его разбора, которого, по-видимому, следовало ожидать, судя по впечатлению, произведенному романом. Но этого мало, что критики не было; ее и не могло быть; а не могло быть потому, что изделие г-на Стебницкого, известное в продаже под названием «Некуда», никогда не было *литературным произведением*; стало быть, и относиться к нему, как к настоящему роману, не только не было надобности, но даже и не было никакой возможности» [2].

Уже в начале XX века Р.В. Иванов-Разумник утверждал, что «и во «Взбаламученном море», и в «Некуда», и в «Мареве» мы не найдем реального типа нигилиста шестидесятых годов, а найдем коллекцию уродов и злодеев (особенно в романе Лескова), нарисованных слишком по-суздальски» [3].

Действительно, антинигилистические романы середины XIX века объединены главной, на наш взгляд, мыслью: в России нет никакой реальной основы для революции, революционные же идеи насаждаются извне тайными агентами польских заговорщиков (например, романы В.П. Клюшникова, Н.С. Лескова, В.В. Крестовского). Однако думается, что это связано с единством взглядов пи-

[1] Русское слово. 1864. № 6. С. 48.

[2] Щедрин Н. (М.Е. Салтыков). Полн. собр. соч. Т. 8. С. 364–365.

[3] Иванов-Разумник. История русской общественной мысли : в 3 т. М. : Республика : ТЕРРА, 1997. Т. 2. С. 87.

сателей-антинигилистов на революционное движение и будущее России, а не с отсутствием дарования, и взгляды эти имели под собой основательную почву. Недаром такая оценка российской действительности середины XIX века полностью совпадает с мнением В.И. Ленина, признававшего факт «отсутствия революционности в массах великорусского населения. Тогда ее не было» [1]. Несмотря на сходство многих образов и единство главной идеи, авторы антинигилистических романов по-разному решали задачу художественного изображения тех, кого они считали разрушителями исконно российских устоев и традиций, и определения положительной программы.

Проповедники новых ценностей в антинигилистических романах, как правило, движимы личными корыстными интересами. Они оказываются людьми авантюристического склада, готовыми для достижения своих целей жертвовать окружающими. Называть этих героев революционерами, на наш взгляд, было бы несправедливо (особенно четко граница между революционером и нигилистом проведена в романе Н.С. Лескова «Некуда»). С одной стороны, скорее это люди-приспособленцы, которые, используя идеи материализма, эмансипации женщины, освобождения от старой морали и вульгаризируя их, стремятся стать лидерами и пожить без всяких моральных обязательств на чужой счет под прикрытием коммун и словоблудия. Именно к такого рода «общественным деятелям» испытывают многие авторы антинигилистической прозы нескрываемую ненависть, которая неизбежно распространяется и на теории, ими распространяемые и ими же опороченные. С другой стороны, писатели выводят в своих произведениях чистых, ищущих людей, искренне стремящихся к обновлению и в силу этого стремления оказывающихся в лагере новоявленных нигилистов. Как правило, жизнь их заканчивается трагическими разочарованиями, а иногда и смертью. Хотелось бы несколько подробнее остановиться на наиболее характерных и интересных, на наш взгляд, романах.

В романе «Некуда» Н.С. Лесков рассматривает как авантюру создание коммун и подпольную революционную деятельность. В самом названии автор подчеркивает мысль о том, что революционный путь для России – путь в никуда. Изображая неудачные попытки распространять листовки среди рабочих, Лесков пытается доказать, что народ совершенно не склонен ни к каким антиправительственным действиям и, более того, искренне опасается агитаторов. Розанов, в котором угадываются черты автора, говорит, «что надо все бросить и не возиться, что никаких элементов для революции нет» [2]. Деятельность коммуны писатель описывает с сарказмом, достигающим апогея в сцене изображения собрания, где становится ясно, что подавляющее большинство коммунаров не способно ни к какому труду, что идея совместного заработка и равного распределения средств – утопия и что Белоярцев, возглавивший коммуну, заботится только о себе.

---

[1] Ленин В.И. Полн. собр. соч. Т. 21. С. 25.

[2] Лесков Н.С. Собр. соч. : в 12 т. М. : Правда. 1989. Т. 4. С. 288.

Однако помимо политических авантюристов Лесков выводит в романе и образ истинного, кристально честного революционера. Таков швейцарец Райнер, готовый на любые жертвы ради революционной борьбы и в конце произведения погибающий во имя свободы польского народа. Критиками замечено, что единственный истинный революционер в романе иностранец, и ему все равно, где делать революцию. Действительно, для Райнера главное – борьба за свободу независимо от места и народа, лишь бы была революционная ситуация. Именно поэтому введенный в заблуждение швейцарский революционер приезжает в Россию, где, по его мнению, революция назрела. Лесков же доказывает, что ни о какой революционной ситуации в России нет и речи, есть лишь нечистоплотные «болтуны», стремящиеся за модой и легкой жизнью. Именно с этим, на наш взгляд, связано вынужденное бездействие Райнера, его положение кормильца целой когорты философствующих бездельников, готовых в тяжелый момент исчезнуть, прихватив с собой что-то хоть мало-мальски ценное, и в конечном счете гибель героя произведения. По меткому замечанию Л.А. Аннинского, две сферы – «дворянско-романтическая» и «разночинско-карикатурная» – соединяются в романе «Некуда» «в причудливое, гротескное целое «вертикаль»: на вершине Райнер, осиянный и безукоризненный; но вот эта чистая, романтическая революционность нисходит в родимое болото; и сразу сияние гаснет, захлебывается в гниющей вони» [1]. Конечно, это не значит, что честные и благородные идеи в России некому было поддержать. Не менее Райнера способен к самопожертвованию Юстин Помада, погибший также во время польского восстания.

В этой связи интересен образ Лизы Бахаревой, стоящей в одном ряду с такими героинями, как Вера из романа И.А. Гончарова «Обрыв», Елена из «Накануне» И.С. Тургенева. Эта девушка задыхается в атмосфере, которая стала для нее невыносимой. Зараженная новыми идеями в пансионе, она не принимает прежнюю жизнь, не соблюдает общепринятые правила приличия, а затем и вовсе уходит из дома. Общение с «нигилистами», участие в коммуне приводят девушку к глубокому разочарованию и чахотке. Н.С. Лесков относится к своей героине с глубоким сочувствием, тем более, что, по его мнению, бунт Лизы бессмыслен, а ее энергия и силы должны были быть направлены по другому пути, который она не смогла разгадать. Такое же разочарование в революционно-демократических идеях испытывают героиня романа В.П. Клюшникова Инна Горобец, назвавшая их «маревом», Анна Лубянская из «Панургова стада» В.В. Крестовского, Марина из романа «Марина из Алого Рога» Б.М. Маркевича.

По мнению многих авторов антинигилистических романов, революционные идеи умело использовали польские заговорщики. Именно им выгодна была смута в России, на фоне которой они надеялись реализовать свои сепаратистские планы. Эта мысль, лишь намеченная Лесковым в романе «Некуда» и под-

[1] Аннинский Л.А. Лесковское ожерелье. 2-е изд., доп. М. : Книга, 1986. С. 66.

держанная В.П. Клюшниковым в «Мареве», развита и положена в центр повествования В. Крестовским, автором дилогии «Кровавый пуф».

В.В. Крестовский в дилогии «Кровавый пуф», широко используя традиции своего популярного произведения «Петербургские трущобы», отводит большое место в романе теме польского национально-освободительного движения. Это движение в его изображении не имеет ничего общего с идеями освобождения народа: панство и католическое духовенство, желающие самостоятельности от русского царя для еще более беспощадной эксплуатации простого люда, – вот истинный двигатель подготовки и проведения польского восстания. Для достижения своих целей представители «польской партии» не гнушаются никакими средствами, будь то подкуп, шантаж, соблазнение или убийство. Именно они, по глубокому убеждению писателя, провоцируют крестьянские волнения и их подавление с помощью военной силы; умело манипулируют честными людьми, стремящимися к справедливости, а также авантюристами от политики, одним из которых является Полояров, бывший полицейский пристав, отставленный за злоупотребления и решивший заработать капитал новыми идеями, которые необходимы ему лишь для реализации своих неприглядных, а порой откровенно подлых намерений. Этот человек в изображении писателя совершенно лишен нравственности, ему присущи наглость, алчность и похотливость. Доведя до абсурда мысль о женской эмансипации, Полояров соблазняет Анну Лубянскую, а узнав о ее беременности, бежит в Петербург, где принимает активное участие в студенческих волнениях, выступая скорее в роли провокатора, нежели борца за свободу. Организованная Полояровым коммуна изображена в романе откровенно пародийно: в ней собрались люди, не умеющие и не желающие трудиться, поэтому ее развал вполне оправдан. Кроме всего прочего, Полояров труслив и способен на предательство. В финале романа Крестовский показывает, что именно Полояров один из первых спешит в Литву после поражения польского восстания, чтобы получить прибыльное место.

В контексте рассматриваемой нами темы наиболее интересен выведенный В. Крестовским образ Василия Свитки. Один из наиболее активных участников польского заговора во второй части дилогии, романе «Две силы», он оказывается вовсе не тем человеком, какого знал читатель: в действительности это крайне амбициозный, тонкий и хитрый политик с диктаторскими устремлениями. Для осуществления своего плана (стать диктатором самостоятельной Литвы) Свитка умело использует силы и средства польских заговорщиков, в отличие от которых стремится совершить революцию не только политическую, но и социальную. Оказавшись в среде близких ему людей (любовницы и ее брата), Свитка озвучивает свои тайные планы: «…в нужную минуту я сумею захватить в свои руки безусловную диктатуру над всей Литвой!..» [1]. Он предлагает облегчить жизнь простого народа социальной революцией, но не из-за заботы о людях, а понимая, что жесточайшая эксплуатация крестьян не позволит ему вести борь-

[1] Крестовский В.В. Кровавый пуф : роман : в 2 кн. М. : Современный писатель. 1995. Кн. 2. С. 240.

бу и против Варшавы, и против Москвы одновременно. В то же время будущий диктатор главным методом своей борьбы считает террор, причем «с населением должно будет обращаться несравненно суровее, чем московские власти, – это первый залог успеха!» [1].

При всей несопоставимости таланта, глубины психологизма и художественности хочется отметить, что Василий Свитка В.В. Крестовского имеет точки соприкосновения с Петром Верховенским Ф.М. Достоевского: как и Верховенский, Свитка фанатично предан своей идее и так же носит личину, прикрывая свое истинное внутреннее содержание. Характерно, на наш взгляд, что в советском литературоведении этот герой Крестовского оценивался как положительный и ставился в один ряд с Райнером и Инной Горобец [2].

Говоря о Свитке из романа «Кровавый пуф», думается, можно утверждать, что в этом образе нигилист (если можно причислить Свитку к нигилистам), как и в «Отцах и детях», – революционер, но не такой, как, скажем, Райнер из романа Н.С. Лескова «Некуда», и уж тем более не как Рахметов Н.Г. Чернышевского. Свитка – человек, для которого революция – средство достижения единоличной власти.

Будущее России авторы «антинигилистических романов» связывают с исконно русскими народными традициями и качествами. Положительный герой романа А.Ф. Писемского «Взбаламученное море» Веригин умеет, по мнению автора, прислушиваться к «нашей главной народной силе – здравому смыслу». Такая же установка присуща Русанову в романе В.К. Клюшникова «Марево», Розанову в романе Н.С. Лескова «Некуда», Устинову, Холодцу, Лубянскому и Хвалынцеву в романе В.В. Крестовского «Кровавый пуф». Позиция всех этих героев вполне соответствует позиции тех представителей русского общества, которых Н.С. Лесков назвал «постепеновцами». Деятельность их заключается в честном исполнении своей работы, воспринимаемой как общественный долг.

Как ни странно, такая же позиция характерна и для одного из самых последовательных революционных демократов Н.Г. Чернышевского. В романе «Что делать?» писатель не призывает к немедленной революции, что, по всей видимости, связано не только с цензурными соображениями. Единственный герой, непосредственно занимающийся подготовкой к революции, – Рахметов; остальные «новые люди» в каком-то смысле близки положительным героям «антинигилистических романов». Особенно это касается Лопухова и Кирсанова, честных и трудолюбивых людей. Н.Г. Чернышевский безусловно считал революцию главным средством достижения социальной справедливости, но в то же время прекрасно понимал, что подготовка ее требует времени. Появление людей рахметовского склада – первый шаг в деле революции, немыслимой без участия широких народных масс. Но народ не готов к участию в радикальных преобразованиях, поэтому революция пока невозможна. Такой взгляд исповедует и герой романа «Пролог» Волгин, вобравший в себя множество автобиографиче-

[1] Крестовский В.В. Кровавый пуф. С. 242.
[2] Писемский А.Ф. Взбаламученное море. М., 1938. Т. 2. С. 100.

ских черт автора и являющийся прямым проводником его идей. В «Прологе» Н.Г. Чернышевский приходит к выводу о преждевременности революции в России, а значит нужно готовить общественное мнение и народ, «снизу доверху» еще пропитанный рабством. Таким образом, Чернышевский тоже становится «постепеновцем», ибо считает, что для революции должна сложиться определенная общественно-политическая ситуация, без которой дело закончится трагедией. Разница между Чернышевским и авторами «антинигилистических романов», по нашему мнению, состоит лишь в том, что первый убежден в возникновении революционной ситуации и призывает сделать все, чтобы это случилось быстрее, последние же считают принципиально невозможной революцию в России и полагаются на постепенное, эволюционное продвижение страны к прогрессу; но в тот конкретный исторический отрезок времени никто из них не видел в революции никакого позитивного смысла. Именно поэтому революционер-«постепеновец» Волгин отговаривает революционера-«нетерпеливца» Левицкого от активного и прямого выступления против царского правительства, убеждая его поберечь силы до нужного времени. Однако следует оговориться: так как роман «Пролог» был написан Н.Г. Чернышевским в конце 60-х – начале 70-х годов XIX века, то писатель-демократ, переосмыслив общественно-политическую ситуацию 1860-х годов, пришел к выводу, озвученному в антинигилистических романах: в народных массах революционных настроений не было, и освободительное движение опиралось на теорию, оторванную от жизненных реалий.

Из всего вышесказанного можно сделать следующий вывод: «постепеновцы», к которым причислял себя Н.С. Лесков и которыми были И.А. Гончаров, И.С. Тургенев, Ф.М. Достоевский и другие, по сути близки некоторым революционерам своим желанием прогрессивного развития страны. Вместе с тем необходимо отметить принципиальное различие, в основе которого лежит антитеза: духовность – атеизм. Детально этот вопрос рассматривает исследователь Н.Н. Старыгина в работе «Образ человека в русском полемическом романе 1860-х годов». Если одни писатели не мыслили будущее России без православия, то другие отвергали Бога, выдвигая на первое место человеческий разум, что и породило непримиримый антагонизм. «Образы-понятия «нигилист» и «новый человек» выступали своего рода антагонистами на понятийном уровне: концептуальными основами их содержания были противоположные воззрения на мир и человека, хотя смысловым ядром образов было одно и то же социальное явление – разночинство. Но если в образе-понятии «новый человек» находила непосредственное и последовательное выражение нигилистическая антропология (образ идеализирован), то образ-понятие «нигилист» утверждал иное видение мира и человека «от противного», демонстрируя «тупики нигилизма» (новый человек» был деидеализирован и окарикатурен в образе «нигилиста»), – пишет Н.Н. Старыгина [1].

[1] Старыгина Н.Н. Образ человека в русском полемическом романе 1860-х годов (концептуальные основы и художественное воплощение) : в 2 ч. М. ; Йошкар-Ола, 1996. С. 83.

Почему же в острой литературно-политической борьбе писатели разных направлений, бесспорно желающие только добра России и русскому народу, не смогли найти точек соприкосновения, прийти к компромиссу и направить общие усилия к достижению благородных целей? Почему авторы «антинигилистических романов» стали изгоями и при их появлении «люди брали шапки и уходили вон» [1]? Почему демократическая критика видела в героях «антинигилистических» произведений злобную пародию на революционное движение? Думается, пришло время попытаться объективно ответить на эти вопросы.

Безусловно, Ф.М. Достоевский, Н.С. Тургенев, Н.С. Лесков, А.Ф. Писемский, В.П. Клюшников, В.В. Крестовский и другие писатели сходных взглядов не хотели революции и пытались своими произведениями повернуть общественное мнение против «нетерпеливцев», с которыми расходились и в общественно-политических вопросах, и по мировоззрению. В то же время авторы антинигилистических романов высветили в революционном движении такие негативные стороны, которые писатели демократического лагеря не замечали, а возможно, не хотели замечать в силу, как им казалось, нетипичности или отталкиваясь от посылки Базарова о том, что «Ситниковы нам необходимы», ибо «не богам же, в самом деле, горшки обжигать!» [2]. Революция как достижение кем-то единоличной власти, как возможность диктатуры; социалистические, материалистические идеи как прикрытие пошлости, безнравственности; нигилизм как бесплодное отрицание всего, в том числе любых этических и эстетических ценностей – вот то, против чего, на наш взгляд, выступали если не все, то многие авторы «антинигилистических романов». В нигилизме писатели так называемого консервативного лагеря, по справедливому замечанию Н.Н. Старыгиной, «видели проявление позитивистски-материалистического мировосприятия, присущего русским радикалам. Антинигилизм основывался на христианском идеализме, на признании Бога творцом мира и человека. Традиционное религиозное мировосприятие осмыслялось антитезой новому – позитивистскому. Поэтому нигилизм воспринимался не соприродным национальному сознанию» [3].

То, что было изображено писателями-антинигилистами, не могло повести Россию вперед, а лишь обещало заменить самодержавную власть другой, возможно еще более страшной диктатурой, или привести к анархии в обществе, лишенном всех моральных ограничителей, то есть, в сущности, к наихудшей анархической модели буржуазного строя. Для такого взгляда на революционное движение в России, очевидно, были основания.

Неслучайно одной из особенностей некоторых антинигилистических романов является их ярко выраженная публицистичность, которую в недавнем прошлом толковали как инсинуации «в отношении действительных исторических лиц» и «попытки «документировать» повествование выдержками из «Колокола», из статей «Современника» и «Русского слова», из материалов по кре-

[1] Фаресов А.И. Против течений. Н.С. Лесков. Его жизнь, сочинения, полемика и воспоминания о нем. СПб., 1904. С. 60.

[2] Тургенев И.С. Отцы и дети. М., 1968. С. 104.

[3] Старыгина Н.Н. Образ человека в русском полемическом романе 1860-х годов. С. 68.

стьянскому делу и т.д.» [1]. Н.С. Лесков писал в «Авторском признании», составленном им как «Открытое письмо к П.К. Щербальскому»: «У меня есть наблюдательность и, может быть, есть некоторая способность анализировать чувства и побуждения, но у меня *мало фантазии*. Я выдумываю тяжело и трудно, и потому я всегда нуждался в живых лицах, которые могли меня заинтересовать своим духовным содержанием. Они мною овладевали, и я старался воплощать их в рассказах, в основу которых тоже весьма часто клал действительное событие. Так почти написано все, а по преимуществу роман «Некуда»… Вы знаете и многим известно, что этот роман представляет многие действительные события, имевшие в свое время место в некоторых московских и петербургских кружках» [2].

Не секрет, что у многих героев романа «Некуда» были реальные и узнаваемые современниками прототипы: в образе Пархоменко угадывался один из представителей революционного движения А.И. Ничипоренко, в образах Белоярцева и Завулонова – писатели-демократы Слепцов и Левитов, а маркизы де Бараль и «углекислых фей Чистых Прудов» – графиня Салиас и сестры Новосильцевы. То же самое касается дилогии Крестовского: помимо упоминания Чернышевского, Герцена и Муравьева в образе Свитки писатель использовал черты участника польского восстания 1863 года Константина Калиновского. В первой редакции повести «Грачевский крокодил» писатель И.А. Салов «чисто фотографически воспроизвел… личность одного из виденных им молодых людей» [3].

Клеймя авторов антинигилистической направленности за фотографичность, публицистичность и т.д., критики XIX века и ученые советского периода по вполне понятным причинам совершенно не настроены были осуждать за то же самое других писателей, в романах которых также часто использовались исторические личности, автобиографичность и публицистика.

Так, «в основание главной фигуры» «Отцов и детей» легла поразившая Тургенева «личность молодого провинциального врача Дмитриева» [4]. В романах о «новых людях» и революционерах наблюдается такая же тенденция: в образе Волгина угадывается сам Чернышевский, в Левицком – Добролюбов, в Соколовском – Сераковский («Пролог»); Кожухову Степняк-Кравчинский придал много автобиографического, а также черты своих товарищей по революционному подполью («Андрей Кожухов») и т.д.

В.В. Крестовский в своем романе приводит крупные выдержки из «Колокола», показывая, что А.И. Герцен не владел информацией о реальной ситуации в России и Польше и оказался игрушкой в руках польской аристократии, нуждающейся в поддержке Европы, выдержки из российских газет, апеллирует к архивным материалам, рисующим нечеловеческую жестокость участников

[1] История русского романа. Т. 2. С. 101.

[2] Шестидесятые годы. Материалы по истории литературы и общественному движению / АН СССР. М. ; Л. 1940. С. 344–345.

[3] Салов И.А. Грачевский крокодил: повести и рассказы. М. : Современник, 1984. С. 22.

[4] Тургенев И.С. Собр. соч. Т. 10. С. 346.

польского восстания по отношению к русским солдатам и офицерам, захваченным в плен. Все это делает «Кровавый пуф» в известном смысле художественно-документальным романом-хроникой.

Насколько справедлив взгляд Крестовского на польские события, еще предстоит разобраться (в первую очередь историкам), но ясно одно: создатели «антинигилистических романов» располагали материалами, отталкиваясь от которых создавали непривлекательные образы «нигилистов», именно нигилистов в кавычках (если понимать по-тургеневски нигилист – революционер), ибо эти персонажи не являются литературными потомками Базарова, а скорее Кукшины и Ситниковы, но более циничные, пустые и одновременно амбициозные. В.В. Крестовский еще до «Кровавого пуфа» разделил нигилистов и лженигилистов в первом своем романе «Петербургские трущобы»: «Из женщин можно отметить один только вновь народившийся маскарадный тип, еще не существовавший в эту эпоху конца пятидесятых годов, к которой пока еще относится течение событий нашего рассказа. Это особого рода маски, которые называют себя, Бог уж их знает, с какой стати, «нигилистками», хотя между заправскими нигилистками и ими такая же разница, как... Выбирайте сами любое сравнение из двух совершенно противоположных предметов. Те, по крайней мере, несмотря на все свои странности, думают о чем-нибудь серьезном и добросовестно режут себе лягушек, а эти – всю свою жизненную задачу полагают в шнырянье по маскарадам, ходят там с «литераторами», но чуть завидят какого-нибудь кавалергарда или гусара – опрометью бросаются к нему и рассказывают о том, как им надоели литераторы, а когда сами они надоедят кавалергарду, то удаляются под «литераторов» и повествуют о том, как им надоели кавалергарды. Вообще, эти маски чувствуют влеченье к личностям двух означенных категорий и убеждены почему-то, что это именно и есть нигилизм» [1].

Именно их деятельность, по определению А.Ф. Писемского, «одно только обезьянство, игра в обедню, как дети вон играют» [2]. Однако последствия деятельности новоявленных «нигилистов» отнюдь не игрушки: калечатся судьбы честных, мечтающих о новой жизни людей, и в конечном счете дискредитируется все революционное движение.

Интересно, что И.С. Тургенев в романе «Дым» изобразил подобных «героев», составляющих русскую политическую эмиграцию, Биндасова и Губарева, образы которых не были восприняты демократическим лагерем как памфлет на А.И. Герцена и Н.П. Огарева. Недостатком «Дыма» сочли лишь отсутствие в романе представителей подлинной демократии. Д.И. Писарев писал Тургеневу по этому поводу: «Мне хочется спросить у вас: Иван Сергеевич, куда вы девали Базарова?» [3].

Нужно отметить, что в романах о «нигилистах» Н.С. Лесков и В.В. Крестовский в отличие от И.С. Тургенева в «Дыме» показывают истинных револю-

---

[1] Крестовский В. Петербургские трущобы (книга о сытых и голодных) : роман : в 2 кн. Л. : Худож. лит., 1990. С. 412.

[2] Писемский А.Ф. Взбаламученное море. Т. 3. С. 283–284.

[3] Писарев Д.И. Соч. : в 4 т. М. : Гослитиздат, 1955–1956. Т. 4. С. 424.

ционеров, образы которых написаны с явной симпатией. Это Райнер и Помада в «Некуда», майор Форов в «На ножах», Лука Благоприобретов в «Кровавом пуфе», герои, которые подтверждают, по нашему мнению, наличие четкого разделения авторами своих героев на «нигилистов» (революционеров) и «лженигилистов» (авантюристов от революции). Истинные революционеры Райнер и Благоприобретов всю свою жизнь, подобно Рахметову, посвящают делу, в которое искренне верят. Находясь в постоянной работе, искренние, честные и преданные идее, они не замечают примазавшихся и живущих за их счет подонков, получающих дивиденды от революционных идей. Это прекраснодушие, привычка некритически относиться к окружающим, оценивать их по себе только потому, что они примкнули к революционно-демократическому лагерю, закрывая глаза на вопиющие факты, благоприятствует увеличению числа бессовестных бездельников, эксплуатирующих в личных целях благородные теории социализма, эмансипации женщины и т.д.

Повышенное внимание именно к негативной стороне русского революционного движения, очевидно, обусловило желание, например, А.Ф. Писемского «изобразить почву, на которой в последнее время расцвела наша псевдореволюция» [1].

Позиция некоторых авторов «антинигилистических романов», на наш взгляд, может быть проиллюстрирована словами Ф.М. Достоевского в романе «Униженные и оскорбленные»: «Я и сам говорил себе «быть не может» сначала, даже и теперь иногда говорю себе «быть не может». Но в том то и дело, что это быть может и, по всей вероятности, есть».

Возможно, вышеупомянутые образы революционеров, их судьбы были призваны открыть глаза истинным борцам за свободу на тех представителей анархического нигилизма, которые укрывали за громкой фразой аморальность, ничтожество и пошлость, втаптывая в грязь само понятие «революционер» и отталкивая от революционного движения людей, находящихся в поиске путей к лучшей жизни. Если это так, то нужно с сожалением констатировать, что предостережение не было услышано: революционно-демократический лагерь, подобно героине рассказа В.Г. Короленко «Чудная», раз и навсегда определил, кто друг, а кто враг, и ни о каких компромиссах речь идти не могла.

Между тем в 1870–1871 годах Н.С. Лесков создает свой последний антинигилистический роман «На ножах», в котором изображает окончательное вырождение нигилизма и нигилистов, не прячущихся больше за ширмой красивых идей и доведших идеи демократов-шестидесятников до полного абсурда. По определению исследователя А. Шелаевой, «в фокусе лесковского романа оказываются бывшие нигилисты, вышедшие из политической борьбы, но пытающиеся оставить за собой право на иные нравственные нормы, на особое положение» [2]. В этом произведении Лескова, по нашему мнению, впервые появляются изверги, нравственные уроды и злодеи, перед которыми блекнут Белоярцевы, Завулоновы, Полояровы, Анцыфровы и другие «нигилисты» антинигилистических романов.

[1] Писемский А.Ф. Материалы и исследования. Письма / АН СССР. М. ; Л., 1936. С. 164.

[2] Шелаева А.А. Забытый роман // Лесков Н.С. На ножах : роман : в 6 ч. М. : Русская книга, 1994. С. 11.

И здесь самое время вернуться к Иванову-Разумнику, утверждавшему в отрывке, приведенном выше, что в антинигилистических романах нет ни одного реального нигилиста 1860-х годов. В своей работе «История русской общественной мысли» он предлагает для выяснения понятий исключить из числа «нигилистов» таких литературных героев, как Базаров, Рахметов, Рязанов, Светлов, то есть героев положительных, и называть их вслед за Д.И. Писаревым «реалистами». Полагаем, что с этим мнением вполне можно согласиться.

Затем Иванов-Разумник пишет, что «один только гениальный Ф. Достоевский подошел близко к психологии «нигилизма» в типе Раскольникова», и отказывает, как уже было сказано, в типичности героям романов Писемского, Лескова, Клюшникова. Вместе с тем автор исследования заявляет, что «писаревщиной и нигилизмом окрашена вся вторая половина эпохи шестидесятых годов»: «нигилисты» пришли на смену мыслящему реализму и опошлили, загрязнили те истины и положения, до которых с такой тяжкой внутренней работой дошли реалисты» [1].

Чтобы разъяснить, как именно загрязнили и опошлили нигилисты истины реалистов, автор «Истории русской общественной мысли» обращается к словам Н.К. Михайловскому, охарактеризовавшему позицию «новых» нигилистов: «Мы реалисты, а так как с точки зрения реализма нравственно то, что естественно, то мы, повинуясь естественной борьбе за существование, признаем нравственным давить слабых и неприспособленных. Мы – реалисты, а так как с точки зрения реализма жертва есть сапоги всмятку, то мы живем единственно ради своей утробы… Мы реалисты, а так как с точки зрения реализма наука должна служить практике и сама по себе цены не имеет, то мы пускаем ее в ход для обделывания своих практических делишек» [2].

Удивительно, что Иванов-Разумник, таким образом, вступает в противоречие с самим собой, отказывая в типичности героям так называемой «реакционной беллетристики». Ведь вполне очевидно, что в «антинигилистических романах» «Взбаламученное море», «Марево», «Некуда» содержалось предсказание перерождения «реализма» в «нигилизм» через, возможно, в то время нетипичных «антигероев», а в «Кровавом пуфе» и «На ножах» – осмысление «нигилизма», хотя Крестовский, вероятно, и перенес тип «нигилиста» из конца 1860-х годов в их начало.

Н.С. Лесков писал И.С. Аксакову: ««Некуда» частию есть исторический памфлет. Это его недостаток, но и его достоинство, – как о нем негде писано: «он сохранил на память потомству истинные картины нелепейшего движения, которые непременно ускользнули бы от историка, и *историк непременно обратится к этому роману…».* В «Некуда» есть пророчества, все целиком исполнившиеся» [3]. Эти слова, очевидно, приложимы ко всем антинигилистическим романам.

---

[1] Иванов-Разумник. История русской общественной мысли. С. 87, 179, 185

[2] Михайловский Н.К. Собр. соч. СПб., 1897. Т. 4. С. 38–41.

[3] Лесков Н.С. Сочинения Павла Якушкина. С. 180.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннинский, Л.А. Лесковское ожерелье. – 2-е изд. доп. – М. : Книга, 1986. – С. 66.
2. Буслаев, Ф.И. Мои досуги : в 2 ч. – М., 1886.
3. Иванов-Разумник. История русской общественной мысли : в 3 т. – М. : Республика : ТЕРРА, 1997. – Т. 2.
4. История русского романа : в 2 т. – М. ; Л. : Наука, 1962–1964.
5. История русской литературы XIX века : в 2 т. / под ред. С.М. Петрова. – М. : Учпедгиз, 1963.
6. Крестовский, В. Петербургские трущобы (книга о сытых и голодных) : роман : в 2 кн. – Л. : Худож. лит., 1990.
7. Крестовский, В.В. Кровавый пуф : роман : в 2 кн. – М. : Современный писатель, 1995.
8. Кущевский, И. Николай Негорев, или Благополучный россиянин. – М. : Гослитиздат, 1958.
9. Ленин В.И. Полн. собр. соч. – Т. 18, 21.
10. Лесков, Н.С. Собр. соч. : в 12 т. – М. : Правда, 1989.
11. Лесков, Н.С. Сочинения Павла Якушкина. – СПб., 1884.
12. Львов-Рогачевский, В. Поворотное время // Современный мир. – 1911.
13. Михайловский, Н.К. Собр. соч. – СПб., 1897. – Т. 4.
14. Нилус, С. На берегу Божьей реки. – Изд-во Свято-Троицкой Сергиевой Лавры, 1991.
15. Омулевский, И.В. Шаг за шагом. – Иркутск. : Иркут. кн. изд-во, 1953.
16. Писарев, Д.И. Соч. : в 4 т. – М. : Гослитиздат, 1955–1956. Т. 2–4.
17. Писемский, А.Ф. Материалы и исследования. Письма / АН СССР. – М. ; Л., 1936.
18. Русские писатели. – М., 1989. – Т. 1.
19. Русский вестник. – 1862. – Июль.
20. Русское слово. – 1864. – № 6.
21. Салов, И.А. Грачевский крокодил : повести и рассказы. – М. : Современник, 1984.
22. Старыгина, Н.Н. Образ человека в русском полемическом романе 1860-х годов (концептуальные основы и художественное воплощение) : в 2 ч. – М. ; Йошкар-Ола, 1996.
23. Тургенев, И.С. Отцы и дети. – М., 1968.
24. Тургенев, И.С. Собр. соч. : в 12 т. – М. : Гослитиздат, 1953. – Т. 10.
25. Фаресов, А.И. Против течений // Н.С. Лесков. Его жизнь, сочинения, полемика и воспоминания о нем. – СПб., 1904.
26. Чернышевский Н.Г. Полн. собр. соч. : в 15 т. – М. : Гослитиздат, 1939–1949. – Т. 3, 11.
27. Шелаева, А.А. Забытый роман // Лесков Н.С. На ножах : роман : в 6 ч. – М. : Русская книга, 1994.
28. Шелгунов, Н. Воспоминания. – М. ; Пг. : ГИЗ, 1923.
29. Шеллер-Михайлов, А.К. Полн. собр. соч. – СПб., 1904. – Т. 2.
30. Шестидесятые годы. Материалы по истории литературы и общественному движению / АН СССР. – М. ; Л., 1940.
31. Щедрин, Н. (М.Е. Салтыков). Полн. собр. соч. – М. : Гослитиздат, 1937. – Т. 7–8.

С.Н. Моторин

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЬЕС А. ВАМПИЛОВА

В статье рассматривается драматургия А. Вампилова. Особое внимание уделяется композиции пьес писателя, как внешней, так и внутренней. Прослеживается корреляция между формальным построением отдельных произведений и их идейно-художественным содержанием в целом, позволяющая рассматривать творчество драматурга как особое явление – «театр Вампилова». В рамках данной проблематики осуществляется анализ следующих пьес: «Прощание в июне», «Старший сын», «Провинциальные анекдоты», «Утиная охота», «Прошлым летом в Чулимске». Статья адресована преподавателям русской литературы и студентам-филологам.

драматургия, пьеса, композиция, художественный образ, герой, персонаж, характер, драматическое действие, архитектоника, система образов, театр Вампилова.

Композиционно вампиловские пьесы, на первый взгляд, могут показаться однотипными и достаточно традиционными. Все они, за исключением «Двадцати минут с ангелом», имеют кольцевую композицию: первая и последняя сцены в них формально совпадают, место действия одно и то же. Однако в конце пьесы герой, как правило, выходит на новый этап жизни. Финал – это своеобразный зрительный образ свершившихся перемен в самом герое, что подчеркивают повторяющиеся почти буквально сценические обстоятельства.

Действие первой многоактной пьесы Вампилова «Прощание в июне» начинается на углу старого дома, возле доски объявлений. Таня читает расклеенные афиши. Слышны разучиваемые кем-то музыкальные гаммы. Появляется Колесов, затевает разговор с понравившейся ему симпатичной девушкой, в ходе которого герой приглашает ее пойти с ним на свадьбу. Общий тон беседы несерьезен, как и при всякой попытке познакомиться на улице. Таня желает казаться неприступной, но немного кокетничает, Колесов старается ей понравиться, но при этом не слишком настойчив. Вся сцена пронизана весенним настроением, энергией молодости, ожиданием чего-то нового в жизни. Героя переполняют оптимизм и ощущение собственной силы, его энергия рвется наружу.

В конце пьесы герои вновь встречаются на том же самом месте: тот же дом, та же доска объявлений. Вновь звучат гаммы, но значительно увереннее, чем в первый раз, уже лето, к этому моменту герои много пережили.

В финале драматург подчеркнуто повторяет не только детали обстановки, но и элементы, опорные точки диалога, произошедшего в начале произведения. Это необходимо автору для создания резкого контраста между исходной и конечной ситуацией. Колесов пытается заговорить с Таней, куда-то снова пригласить, но он уже не так уверен в себе. Хотя его решительность сохранилась, но от прежнего оптимизма не осталось и следа. Герой чувствует свою вину перед девушкой и не знает, как изменить ее отношение к себе. Таня не простила ему предательства и не приняла нового приглашения, хотя Колесов, осознав всю подлость сделки с ее отцом, совершил решительный шаг, публично порвал диплом. Теперь перед героем, в полной мере осознающим необходимость ответственности за поступок и слово, возник вопрос: что делать дальше? И этот вопрос будет возникать после каждого его шага, потому что пришло понимание неизбежности выбора.

В «Старшем сыне» нет столь нарочитого повторения деталей и места действия, совпадают лишь сами ситуации: Бусыгин опоздал на электричку. Однако так же разительно, как и в «Прощании в июне», отличается внутреннее настроение начальной и финальной сцен. В первой происходит нагнетание пессимизма, острого ощущения человеческой разобщенности, почти мизантропии (вспомним, что молодых людей никто не хочет пустить на ночлег, никто не желает протянуть руку помощи попавшим в затруднительное положение и остро нуждающимся в тепле как в прямом, так и в переносном смысле этого слова; сама их мистификация родилась из неверия в человека как носителя доброты и гуманизма; другое дело, что не каждому дано выдержать испытание доверием, – Сильва не выдержал). Последняя же сцена наполнена атмосферой оптимизма, веры в возможность взаимопонимания и торжества идеи «все люди – братья». Если в начале пьесы Бусыгиным овладевает раздражение из-за опоздания на электричку, то в конце, очутившись в подобной ситуации, он воспринимает произошедшее как просто смешной случай и относится к нему с юмором, к тому же это подходящий предлог, чтобы остаться с близкими ему теперь людьми.

Сходной композицией обладает и «Утиная охота», но в отличие от «Старшего сына» смысл финала здесь не так очевиден. Пьеса начинается и заканчивается телефонным разговором Зилова с официантом Димой. И в том, и в другом случае речь идет о поездке на охоту. Между этими двумя звонками на протяжении некоторого времени происходит ряд событий, порождающих как воспоминания героя, так и его действия в настоящий момент. Мальчик приносит ему траурный венок от друзей, Зилов вспоминает свою жизнь, время от времени пытается кому-то дозвониться, решает застрелиться, но самоубийство срывается. Разражается скандал, в результате которого герой окончательно прозревает и выгоняет приятелей. Далее – странное решение: Виктор по телефону заявляет о своем согласии ехать на охоту с Димой, совсем недавно выгнанным им вместе с остальными. Такая финальная сцена позволила многим исследователям говорить об «окончательном падении» Зилова.

В этом же ключе Вампиловым выстроена и пьеса «Прошлым летом в Чулимске», однако ее финал выглядит более определенно. Действие начинается возле чайной летним утром: Валентина чинит палисадник, ей помогает старик Еремеев. События разворачиваются стремительно. Уже через сутки, утром следующего дня, после выяснения отношений внутри всех конфликтных групп персонажей (Шаманов – Валентина; Шаманов – Кашкина; Шаманов – Пашка; Дергачев – Хороших – Пашка; Помигалов – Валентина – Мечеткин), после интриг, скандалов, крушения надежд героев, после того страшного, что произошло с Валентиной, а о случившемся знает большинство, жизнь продолжает свое течение.

Валентина с прежним упорством чинит забор и калитку, Еремеев с готовностью ей помогает. Шаманов, как и накануне, ждет служебную машину, но уже не в прежнем состоянии сонного равнодушия ко всему на свете, а в полной решимости вновь отстаивать справедливость.

Итак, во всех четырех рассмотренных нами пьесах внешняя композиция имеет кольцевое строение, везде происходит как бы возвращение к началу, но финал контрастирует с исходной ситуацией в идейно-эмоциональном плане – это новое начало, отправная точка в будущее изменившегося героя. Явленные в пьесе конфликты имеют свое истинное разрешение лишь во временной перспективе, за пределами ее сценического пространства. Лишь «Провинциальные анекдоты» построены по-иному, хотя первая их часть («История с метранпажем»), на первый взгляд, может показаться композиционно сходной с «Прощанием в июне», «Старшим сыном», «Утиной охотой» и «Прошлым летом в Чулимске».

Действительно, это произведение начинается с появления метранпажа Потапова, страстного футбольного болельщика, желающего послушать репортаж о матче, и заканчивается тем, что он заглядывает в номер, где и начались все события, чтобы сообщить о победе своей любимой команды и поинтересоваться, что здесь произошло. Вроде бы налицо то же возвращение к началу. Однако в данном случае в отличие от предыдущих пьес ситуация диаметрально противоположная – перерождения героя не происходит. Да, Колошин, до смерти испугавшись, вспомнил всю свою жизнь, покаялся, но, как только опасность миновала, сразу обо всем забыл и заявил о своей готовности занять другую административную должность, то есть, по сути, продолжить прежнюю жизнь: «К черту гостиницу! Я начинаю новую жизнь. Завтра же ухожу на кинохронику». Вторая часть «Провинциальных анекдотов» («Двадцать минут с ангелом») с точки зрения как собственно художественных, так и композиционных особенностей представляет собой особый случай в творческой практике А. Вампилова. Некоторые исследователи, например, Б.Ф. Сушков и С.В. Молчанова, совершенно справедливо отмечали наличие в этой пьесе евангельских мотивов, которые, на наш взгляд, способствуют осмыслению не только основной идеи произведения, но и его структуры.

«Двадцать минут с ангелом» состоит из трех композиционно значимых частей. Первая – поиски денег мучающимися с похмелья Анчугиным и Угаровым. Вторая – появление Хомутова и разбирательство с ним. Третья – «признание» Хомутова и реакция присутствующих. Каждая из названных нами частей в свою очередь может быть условно разделена еще на три части. Причем, как это, впрочем, свойственно и другим пьесам Вампилова, здесь отчетливо проявляется внутренняя завершенность каждой сцены.

Анчугин и Угаров пробуют раздобыть денег, действуя по трем направлениям. Сначала на заводе фарфоровых изделий, куда они приехали в командировку. Эту попытку вполне можно назвать «глас вопиющего в пустыне», так как в воскресенье на предприятии выходной и там никого нет. Далее, убедившись в тщетности своих звонков по разным заводским номерам, пьяницы пытаются выпросить нужную сумму у соседей по гостинице и у коридорной Васюты. Однако их отчаянное «Спаси» вызывает только раздражение у окружающих, тогда-то впервые и произносится «черное» слово «черт», которое по мере развития действия будет упоминаться неоднократно. И последней попыткой достать денег становится гаерское, не воспринимаемое всерьез ими самими, обращение Анчугина к прохожим с улицы: «Люди добрые! Помогите!» Следующая за этим призывом сцена начинает вторую часть пьесы.

Появляется Хомутов-ангел и безвозмездно предлагает пропойцам сто рублей. Но они настолько не верят в бескорыстие, что, по словам С.В. Молчановой, «разговор идет как бы мимо друг друга» [1]. Столь желанные совсем еще недавно деньги пугают, просителям чудятся в них подвох и скрытая угроза: «Черт знает что…» Удалившегося было Хомутова возвращают, чтобы он забрал деньги: «Забирай ссуду. Ну тебя к черту». Окончательно оформляется мотив продажи души дьяволу после слов Угарова: «Я чувствую, возьми я эти деньги – и на мне потом долго будут возить воду». Преодолев искушение, как им кажется, «шальными» деньгами, наотрез от них отказавшись, герои хотят выяснить «истинные» причины неслыханной щедрости агронома, но на все их предположения Хомутов отвечает «Бог с вами» и стоит на том, что хотел помочь нуждающимся, и только. Однако это, казалось бы, просто бытовое, фразеологическое выражение играет роль связующего звена в подтексте. Хомутову не верят, атмосфера зла сгущается; стадия уговоров «по-хорошему» заканчивается, начинается разгул бесовства: «ангела» связывают и учиняют допрос с пристрастием, в котором принимают участие все обитатели гостиницы. Дознание постепенно переходит в судилище, на котором обвинительную речь произносит молодожен Ступак: «Товарищи! Что здесь происходит? Это просто чудовищно! Мы же все перегрыземся. И все из-за него! Из-за него! Он провокатор! Он всех нас оскорбил! Оклеветал! Наплевал нам в душу! Его надо изолировать! Немедленно!» Страсти накаляются, назревает «распятие» в форме заключения в психбольницу, которое совсем не входит в планы героя.

Третья часть пьесы включает в себя «признание» в тяжком грехе, вызванное сочувствие к нему со стороны недавних мучителей, их извинения и примирение. «Исповедь» Хомутова вызывает не негодование, не осуждение, а искреннюю жалость и ответное покаяние: «Это ужасно, ужасно. С нами что-то приключилось. Мы одичали, совсем одичали…» И далее: «Прошу вас, не думайте, что мы уж такие отпетые. Это было что-то ужасное. Наваждение какое-то, уверяю вас… Мы должны были вам верить – конечно! Мы были просто обязаны…» Всех присутствующих сблизила материнская соискупительная жертва. Как пишет С.В. Молчанова, в финале пьесы Вампилов «не глумится над падшими, не стеклянный треск стаканов венчает его пьесу, а песня» [2].

Говоря о внутренней композиции пьесы, необходимо отметить, что хотя формально осью действия служит образ Хомутова, его все же нельзя назвать

---

[1] Молчанова С.В. Пожалуйста, ближе к тексту (о драматургии А. Вампилова) // Русская речь. 1993. № 3. С. 9.

[2] Там же. С. 12.

главным героем. Более того, никто из остальных действующих лиц не может претендовать на эту роль, так как все они взаимодополняют друг друга, раскрываясь в столкновениях между собой, по-разному реагируя на Хомутова и его поступок, ставший своеобразным катализатором их поведения.

Что же касается самого Хомутова, то он выделяется среди всех вампиловских героев, ибо наделен особенным характером, и драматург подчеркнул это уже в самом названии – «Двадцать минут с ангелом», где слово «ангел» не взято в кавычки. Такой тип героя в критике получил название «ангелического», ему свойственны наивность, вера в добро, доверчивость, непрактичность. Сам по себе герой такого типа не обладает какими-то особенными конфликтогенными чертами, но в произведениях Вампилова его присутствие и взаимодействие с другими персонажами оказывается необходимым элементом для обострения ситуации, для стремительного нарастания драматизма.

Наиболее сложные психологические коллизии в пьесах Вампилова возникают при столкновении героев ангелического и рефлективного типов. Антитеза двух этих типов порождает невероятную напряженность конфликта даже при минимальном его фабульном проявлении, как, например, в «Старшем сыне», где тоже есть «ангел» – Сарафанов, всю свою жизнь сочиняющий ораторию «Все люди – братья». В. Распутин сказал о нем: «...наивная и чистая душа» [1]. Покинувшая героя жена называла его «блаженным»: «Здравствуй, блаженный…», «Пойми, блаженный…», «Блаженный, подумай о себе…», «У тебя семья, блаженный…», «Прощай, блаженный…» И вот с этим-то чудаком судьба сводит Бусыгина – человека недоверчивого, скептически относящегося к моральным ценностям, в начале пьесы являющегося нравственным антиподом Сарафанова.

Однако по ходу действия выясняется, что он вовсе не закоренелый мизантроп, каким может показаться сначала. Это натура размышляющая, умеющая тонко чувствовать, склонная к сомнению не только по отношению к окружающему миру, но и к самому себе. Его превращения обусловлены способностью к переоценке мира и своего места в нем в процессе рефлексии. На всем протяжении пьесы с ним происходят психологические метаморфозы, ведущие его от разыгрывания из себя сына к превращению в сына. Перипетии уподобления и расподобления ипостасей героя представляют собой удивительно захватывающий и чрезвычайно напряженный процесс, порожденный столкновением с содержанием личности Сарафанова: «Нет уж, не дай-то бог обманывать того, кто верит каждому твоему слову», и «Этот папаша – святой человек».

В. Соловьев в одной из своих статей заметил: «В каждой пьесе А. Вампилова бродит среди прочих персонажей сверхположительный герой, князь Мышкин, праведник, святой» [2]. Как правило, ангелическими чертами драматург наделяет женские образы; таковы Таня из «Прощания в июне», Ирина из «Утиной охоты», Валентина из «Прошлым летом в Чулимске». По мнению Б. Сушкова, это неслучайно: «От того, куда качнется наш мир, стоящий сейчас в точке раз-

[1] Распутин В. Истины Александра Вампилова // Вампилов А. Старший сын. Иркутск, 1977. С. 7.

[2] Соловьев В. Праведники и грешники А. Вампилова // Аврора. 1975. № 1. С. 61.

двоения, – к пропасти животного сладострастия, патологического эгоизма и вражды или к любви и мужественной борьбе за благородную человечность как залогу бессмертия рода человеческого, – во многом, а может, в решающей степени зависит от женщины. И это хорошо понимал Вампилов, подчеркивая в своих героинях эту их мессианскую роль» [1].

Писатель создал свой идеал. По сути это один и тот же женский характер, переходящий из пьесы в пьесу. Интересно, что и возраст героинь приблизительно одинаков, семнадцать-двадцать лет. Многие критики отмечали эту особенность, но наиболее четко ее сформулировал А. Демидов: «Все эти героини едва ли не лишены психологического многомерного характера. Эти героини по существу символичны и выражают некое возвышенное представление автора о чистоте и душевной цельности… Каждая покоряет незамутненностью, прозрачностью своего внутреннего мира» [2].

Сомневающихся, мучающихся раздвоенностью, постоянно рефлектирующих героев тянет именно к таким девушкам. Таня покоряет Колесова безоглядной силой своей любви; Ирина видится Зилову той путеводной звездой, которая способна спасти, вывести на новую жизненную дорогу; Шаманов, соприкоснувшись с Валентиной, пробудился, преодолел свое духовное оцепенение. Но ценой их прозрения всегда оказывается боль, выпавшая на долю героинь. За душевную раздвоенность вампиловских героев расплачиваются те, кто их любит. По мнению Ю. Смелкова, к такому смыслу Вампилов шел от пьесы к пьесе, «все более ослабляя событийные мотивировки, все более подчеркивая внутренние, душевные» [3].

Главным во всех вампиловских пьесах является процесс самоосознания героя, причем этот процесс не выражен напрямую через действие или слово, в монологе, диалоге, но воплощен посредством композиции, сложнейшей архитектонической структуры произведения. Художественному миру драматургии Вампилова по характеру архитектоники свойственны два типа пьес: пьесы центростремительной и центробежной композиции.

Произведениям с центростремительной композицией присуще четкое иерархическое построение системы персонажей, в которой на первый план выводится один главный герой, остальные образы так или иначе работают на него, раскрывая разные стороны его характера. Пьесам с центробежной композицией свойственно свободное переплетение самодостаточных сюжетных линий. В произведениях такого типа отсутствует явно выраженный центральный персонаж, нет иерархической упорядоченности действующих лиц, все герои одинаково важны для движения сюжета и реализации авторского замысла.

На наш взгляд, к первому типу относятся «Прощание в июне», «Утиная охота» и первая часть «Провинциальных анекдотов» – «История с метранпа-

---

[1] Сушков Б. Александр Вампилов: размышления об идейных корнях, проблематике, художественном методе и судьбе творчества драматурга. М. : Сов. Россия, 1989. С. 59.

[2] Демидов А. Заметки о драматургии А. Вампилова // Театр. 1974. № 3. С. 72.

[3] Смелков Ю. Театр Вампилова–пьесы и спектакли // Литературное обозрение. 1975. № 3. С. 94.

жем». Ко второму – «Старший сын», «Прошлым летом в Чулимске» и вторая часть «Провинциальных анекдотов» – «Двадцать минут с ангелом». Если в первой группе пьес доминирует характер персонажа, яркая индивидуальность которого организует все действие, то в пьесах второй группы жизненная стихия полностью владеет человеком.

Как видим, в этом отношении театр Вампилова соблюдает строгую симметрию, что является фактом весьма примечательным и требующим дальнейшего всестороннего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидов, А. Заметки о драматургии А. Вампилова // Театр. – 1974. – №3.
2. Молчанова, С.В. Пожалуйста, ближе к тексту (о драматургии А. Вампилова) // Русская речь. – 1993. – № 3.
3. Распутин, В. Истины Александра Вампилова // Александр Вампилов. Старший сын. – Иркутск, 1977.
4. Смелков, Ю. Театр Вампилова – пьесы и спектакли // Литературное обозрение. – 1975. – № 3.
5. Соловьев, В. Праведники и грешники А. Вампилова // Аврора. – 1975. – № 1.
6. Сушков, Б. Александр Вампилов: размышления об идейных корнях, проблематике, художественном методе и судьбе творчества драматурга. – М. : Сов. Россия, 1989.

МАТЕМАТИКА

Э.Х. Назиев, А.Х. Назиев, Г.И. Келейникова

ОБ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПОЛНОЙ ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Известно, что нахождение решений однородной линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей A сводится к алгебраической задаче нахождения нормальной жордановой формы J матрицы A и определения матрицы P такой, что $J = P^{-1}AP$. Нахождение матрицы J опирается на теорию элементарных делителей характеристической матрицы $A - \lambda E$, что приводит к так называемой полной проблеме собственных значений, состоящей в нахождении всех собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы A. Решение этой проблемы даже в случаях систем не очень высоких порядков сопряжено со значительными трудностями, возникающими уже на стадии получения характеристического уравнения путем развертывания определителя характеристической матрицы. В 1969 году Р. Беллман писал, что «в настоящее время не имеется простых методов нахождения собственных значений и собственных векторов матриц большого размера» [1]. За минувшие с тех пор тридцать лет существенных изменений не произошло. В настоящей работе мы пытаемся продвинуться в решении указанной проблемы, изменив обычный порядок действий. Обычно сначала ищут собственные значения, затем собственные векторы. Мы идем в обратном направлении.

В первой части излагаются общие результаты. Вторая часть посвящена подробному рассмотрению примеров.

однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, полная проблема собственных значений, однородная линейная группа, инфинитезимальный оператор, однопараметрическая подгруппа.

1. Рассмотрим однородную линейную дифференциальную систему

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_{j0} x^j \equiv \xi^i_0 \qquad (\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt}),\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где t – независимая переменная, $x^1,...,x^n$ – неизвестные функции переменной t, a^i_{j0} $(i, j = 1,..., n)$ – комплексные числа. При помощи матрицы A_0 = $(a^i_{j0})^n_1$, составленной из коэффициентов при неизвестных функциях, эту систему можно записать в виде одного дифференциального уравнения

$$\dot{\bar{x}} = A_0\bar{x} \equiv \bar{\xi}_0, \qquad (1.2)$$

где $\bar{x} = (x^1,...,x^n)$, $\dot{\bar{x}} = (\dot{x}^1,...,\dot{x}^n)$, $\bar{\xi}_0 = (\xi^1_0,...,\xi^n_0)$ – векторы-столбцы. Ясно, что между множеством всех квадратных $n \times n$ матриц и множеством всех систем вида (1.1) (уравнений (1.2)) устанавливается взаимнооднозначное соответствие, что позволяет изучать свойства одного из этих множеств, изучая свойства другого.

Если $f(x^1,...,x^n)$ – произвольная дифференцируемая функция указанных аргументов, то ее изменение при бесконечно малом сдвиге вдоль траекторий системы (1.1) характеризуется равенством

$$df = X_0 f\, dt, \qquad (1.3)$$

где

$$X_0 f = \bar{\nabla} f\, \bar{\xi}_0 \qquad (1.4)$$

и $\bar{\nabla} f = (\frac{\partial f}{\partial x^1},...,\frac{\partial f}{\partial x^n})$ – вектор-градиент функции f. Используя равенство (1.2), равенство (1.4) можно переписать в виде

$$X_0 f = \bar{\nabla} f\, A_0\bar{x} \equiv X_{A_0} f. \qquad (1.5)$$

Из равенства (1.3) следует, что задача интегрирования системы (1.1) и задача нахождения решений уравнения $X_0 f = 0$ – суть задачи эквивалентные: всякий (дифференцируемый) интеграл системы (1.1) является решением уравнения $X_0 f = 0$ и наоборот [2].

Заметим, что с точки зрения теории непрерывных групп преобразований дифференциальные уравнения (1.1) определяют однопараметрическую (с параметром t) непрерывную группу G_1 преобразований пространства $(x^1, x^2,..., x^n)$ [3]. В рассматриваемом нами случае мы имеем дело с так называемой однородной линейной группой [4]. Символом (инфинитезимальным оператором) этой группы является оператор $X_0 f$.

Выясним структуру операторов, коммутирующих с оператором $X_0 f$.

Пусть

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \bar{\nabla} f \bar{\xi} \ – \qquad (1.6)$$

искомый оператор. Его координаты должны удовлетворять уравнениям

$$X_0\xi^i = X\xi_0^i \ (i = 1,\dots, n), \tag{1.7}$$

вытекающим из равенства $(X_0, X)f = 0$. Учитывая выражения (1.1) для ξ_0^i (i = 1, …, n) и равенство (1.3), последние равенства можно переписать в виде

$$\dot{\xi}^i = \sum_{j=1}^{n} a_{j0}^i \xi^j \ (i = 1,\dots, n). \tag{1.8}$$

Это – уравнения в вариациях для рассматриваемой нами линейной однородной системы [5]. Как видим, система (1.8) с точностью до обозначений совпадает с системой (1.1). Полезно заметить, что система (1.8) определяет скорость изменения вектора $\bar{\xi} = (\xi^1,\dots,\xi^n)$ вдоль траекторий системы (1.1).

Для дальнейшего изложения удобно перейти к новым переменным

$$z^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j x^i \equiv \bar{\alpha}^j\, \bar{x}, \tag{1.9}$$

где α_i^j $(i, j = 1,\dots, n)$ – постоянные коэффициенты, образующие невырожденную матрицу $P^{-1} = (\alpha_i^j)_1^n$. В этих переменных матрица системы A_0 принимает нормальную жорданову форму $J_0 = P^{-1}A_0P = diag(J_{10},\dots, J_{m0})$, где каждая клетка Жордана имеет вид

$$J_{s0} = \begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & \dots 0 & 0 \\ 1 & \lambda_s & \dots 0 & 0 \\ . & . & .\dots . & . \\ 0 & 0 & .,.1 & \lambda_s \end{pmatrix} \quad (s = 1, \dots, m).$$

При этом дифференциальные уравнения системы (1.1) разбиваются на m независимых друг от друга групп, каждая из которых соответствует своей клетке Жордана:

$$\begin{cases} \dot{z}^{k_s+1} = \lambda_s z^{k_s+1}, \\ \dot{z}^{k_s+2} = z^{k_s+1} + \lambda_s z^{k_s+2}, \\ \dot{z}^{k_s+3} = z^{k_s+2} + \lambda_s z^{k_s+3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{z}^{k_s+l_s} = z^{k_s+l_s-1} + \lambda_s z^{k_s+l_s}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Здесь и всюду далее l_s – порядки клеток, $k_s = l_1 + \dots + l_{s-1}$, $s = 1,\dots, m$ $(k_1 = 0,\ l_1 + \dots + l_m = n)$.

Оператор $X_0 f$ в новых переменных принимает вид

$$\widetilde{X}_0\widetilde{f} = \sum_{s=1}^{m}\left[\lambda_s z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+1}} + \left(z^{k_s+1} + \lambda_s z^{k_s+2}\right)\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + \left(z^{k_s+l_s-1} + \lambda_s z^{k_s+l_s}\right)\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}\right] =$$
$$= \sum_{s=1}^{m}\left[\lambda_s (z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+1}} + z^{k_s+2}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + z^{k_s+l_s}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}) + z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + z^{k_s+l_s-1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}\right] \equiv \quad (1.11)$$
$$\equiv \sum_{s=1}^{m}\left(\lambda_s \widetilde{X}_{k_s+1}\widetilde{f} + \widetilde{X}_{k_s+2}\widetilde{f}\right),$$

где смысл последних обозначений ясен сам собой.

Уравнения (1.10) элементарно интегрируются, в результате чего получаем

$$\begin{cases} z^{k_s+1} = \widehat{C}^{k_s+1}e^{\lambda_s t}, \\ z^{k_s+2} = (\widehat{C}^{k_s+2} + \widehat{C}^{k_s+1}t)e^{\lambda_s t}, \\ z^{k_s+3} = (\widehat{C}^{k_s+3} + \widehat{C}^{k_s+2}t + \widehat{C}^{k_s+1}\dfrac{t^2}{2!})e^{\lambda_s t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{k_s+l_s} = (\widehat{C}^{k_s+l_s} + \widehat{C}^{k_s+l_s-1}t + \ldots + \widehat{C}^{k_s+1}\dfrac{t^{l_s-1}}{(l_s-1)!})e^{\lambda_s t}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Аналогично преобразуется и интегрируется система (1.8).

Вводя вместо координат $\xi^1,\ldots,\xi^n$ новые координаты $u^1,\ldots,u^n$ по формулам

$$u^j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^j\xi^i \equiv \overline{\alpha}^j\,\overline{\xi}, \quad (1.9')$$

получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}^{k_s+1} = \lambda_s u^{k_s+1}, \\ \dot{u}^{k_s+2} = u^{k_s+1} + \lambda_s u^{k_s+2}, \\ \dot{u}^{k_s+3} = u^{k_s+2} + \lambda_s u^{k_s+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{u}^{k_s+l_s} = u^{k_s+l_s-1} + \lambda_s u^{k_s+l_s}, \end{cases} \quad (1.13)$$

интегрирование которой дает

$$\begin{cases} u^{k_s+1} = \widetilde{C}^{k_s+1} e^{\lambda_s t}, \\ u^{k_s+2} = (\widetilde{C}^{k_s+2} + \widetilde{C}^{k_s+1} t) e^{\lambda_s t}, \\ u^{k_s+3} = (\widetilde{C}^{k_s+3} + \widetilde{C}^{k_s+2} t + \widetilde{C}^{k_s+1} \dfrac{t^2}{2!}) e^{\lambda_s t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{k_s+l_s} = (\widetilde{C}^{k_s+l_s} + \widetilde{C}^{k_s+l_s-1} t + \ldots + \widetilde{C}^{k_s+1} \dfrac{t^{l_s-1}}{(l_s-1)!} e^{\lambda_s t}. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Постоянные интегрирования обозначены иначе потому, что они относятся к другому векторному полю и могут принимать значения независимо от того, какие значения принимают постоянные $\widehat{C}^{k_s+1},\ldots,\widehat{C}^{k_s+l_s}$.

Равенства (1.14) и аналогичные им для всех остальных клеток Жордана определяют в канонических переменных координаты коммутирующих с оператором $\widetilde{X}_0\widetilde{f}$ операторов как функции переменной t (и произвольных постоянных $\widetilde{C}^{k_s+1},\ldots,\widetilde{C}^{k_s+l_s}$). Чтобы выразить их через переменные $x^1,\ldots,x^n$, введем переменные

$$v^{k_s+1} = e^{\lambda_s t}, v^{k_s+2} = te^{\lambda_s t}, \ldots, v^{k_s+l_s} = \frac{t^{l_s-1}}{(l_s-1)!} e^{\lambda_s t}. \qquad (1.15)$$

Тогда уравнения (1.12) запишутся в виде

$$\begin{cases} z^{k_s+1} = \widehat{C}^{k_s+1} v^{k_s+1}, \\ z^{k_s+2} = \widehat{C}^{k_s+2} v^{k_s+1} + \widehat{C}^{k_s+1} v^{k_s+2}, \\ z^{k_s+3} = \widehat{C}^{k_s+3} v^{k_s+1} + \widehat{C}^{k_s+2} v^{k_s+2} + \widehat{C}^{k_s+1} v^{k_s+3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z^{k_s+l_s} = \widehat{C}^{k_s+l_s} v^{k_s+1} + \widehat{C}^{k_s+l_s-1} v^{k_s+2} + \ldots + \widehat{C}^{k_s+1} v^{k_s+l_s}, \end{cases} \qquad (1.16)$$

и аналогично запишутся уравнения (1.14):

$$\begin{cases} u k_s+1 = \widetilde{C} k_s+1 v k_s+1, \\ u k_s+2 = \widetilde{C} k_s+2 v k_s+1 + \widetilde{C} k_s+1 v k_s+2, \\ u k_s+3 = \widetilde{C} k_s+3 v k_s+1 + \widetilde{C} k_s+2 v k_s+2 + \widetilde{C} k_s+1 v k_s+3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u k_s+l_s = \widetilde{C} k_s+l_s v k_s+1 + \widetilde{C} k_s+l_s-1 v k_s+2 + \ldots + \widetilde{C} k_s+1 v k_s+l_s. \end{cases} \qquad (1.17)$$

Выражая с помощью (1.16) величины $v^{k_s+1},...,v^{k_s+l_s}$ через переменные $z^{k_s+1},...,z^{k_s+l_s}$ и подставляя найденные выражения в равенство (1.17), получаем выражения координат $u^{k_s+1},...,u^{k_s+l_s}$ через координаты $z^{k_s+1},...,z^{k_s+l_s}$:

$$\begin{cases} u^{k_s+1} = C^{k_s+1} z^{k_s+1}, \\ u^{k_s+2} = C^{k_s+2} z^{k_s+1} + C^{k_s+1} z^{k_s+2}, \\ u^{k_s+3} = C^{k_s+3} z^{k_s+1} + C^{k_s+2} z^{k_s+2} + C^{k_s+1} z^{k_s+3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{k_s+l_s} = C^{k_s+l_s} z^{k_s+1} + C^{k_s+l_s-1} z^{k_s+2} + \ldots + C^{k_s+1} z^{k_s+l_s}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Таким образом, в переменных $z^1,...,z^n$, определенных равенствами (1.9), произвольный оператор, перестановочный с оператором $\widetilde{X}_0\widetilde{f}$, представляется в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{X}\widetilde{f} &= \sum_{s=1}^{m}\left(u^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+1}} + u^{k_s+2}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + u^{k_s+l_s}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}\right) = \\ &\sum_{s+1}^{m}[C^{k_s+1}z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+1}} + (C^{k_s+2}z^{k_s+1} + C^{k_s+1}z^{k_s+2})\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots \\ &+ (C^{k_s+l_s}z^{k_s+1} + \ldots + C^{k_s+1}z^{k_s+l_s})\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}] = \\ &\sum_{s=1}^{m}[C^{k_s+1}(z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+1}} + \ldots + z^{k_s+l_s}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}) + \\ &+ C^{k_s+2}(z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + z^{k_s+l_s-1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}) + \ldots + C^{k_s+l_s}z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}] \equiv \\ &\equiv \sum_{s=1}^{m}\left(C^{k_s+1}\widetilde{X}_{k_s+1}\widetilde{f} + C^{k_s+2}\widetilde{X}_{k_s+2}\widetilde{f} + \ldots + C^{k_s+l_s}\widetilde{X}_{k_s+l_s}\widetilde{f}\right), \end{aligned} \tag{1.19}$$

то есть является линейной комбинацией с произвольными постоянными коэффициентами операторов

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_{k_s+1}\widetilde{f} &= z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+1}} + z^{k_s+2}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + z^{k_s+l_s}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}, \\
\widetilde{X}_{k_s+2}\widetilde{f} &= \qquad\qquad z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+2}} + \ldots + z^{k_s+l_s-1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\widetilde{X}_{k_s+l_s}\widetilde{f} &= \qquad\qquad\qquad\qquad z^{k_s+1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^{k_s+l_s}}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Легко проверить, что операторы (1.20) попарно перестановочны.

Матрицами операторов (1.20) являются квадратные матрицы *n*-го порядка, которые можно представить в виде клеточно-диагональных матриц

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{k_s+1} &= diag(O, \widetilde{B}_{k_s+1}, O), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\widetilde{A}_{k_s+l_s} &= diag(O, \widetilde{B}_{k_s+l_s}, O),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где

$$\widetilde{B}_{k_s+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{B}_{k_s+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ \widetilde{B}_{k_s+l_s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

суть матрицы-клетки размеров $l_s \times l_s$, начинающихся с $k_s + 1$-й строки и $k_s + 1$-го столбца. Легко убедится, что

$$\widetilde{A}^2_{k_s+1} = \widetilde{A}_{k_s+1},\quad \widetilde{A}^2_{k_s+2} = \widetilde{A}_{k_s+3},\ \ldots,\quad \widetilde{A}^2_{k_s+l_s} = O,\ \ \widetilde{A}_{k_s+1}\widetilde{A}_{k_s+\nu} = \widetilde{A}_{k_s+\nu}, \tag{1.23}$$

$$\widetilde{A}_{k_s+1}\widetilde{A}_{k_\sigma+\mu} = 0 \quad s, \sigma = 1,\ldots,m;\ s \neq \sigma;\ \nu = 1,\ldots,l_s;\ \mu = 1,\ldots,l_\sigma,$$

откуда, в частности, видно, что матрицы $\widetilde{A}_{k_s+1}$ идемпотентные, а остальные матрицы нильпотентные, и, кроме того,

$$\sum_{s=1}^{m}\widetilde{A}_{k_s+1} = E. \tag{1.24}$$

Доказано [6], что операторы $X_A f$ и $X_B f$ перестановочны тогда и только тогда, когда перестановочны соответствующие им матрицы *A* и *B*. В силу этого утверждения, из попарной перестановочности операторов (1.20) следует попарная перестановочность соответствующих им матриц (1.21).

Из равенства (1.19) следует, что матрица $\widetilde{A}$ оператора $\widetilde{\widetilde{X}f}$ имеет вид

$$\widetilde{A} = \sum_{s=1}^{m} (C^{k_s+1} \widetilde{A}_{k_s+1} + C^{k_s+2} \widetilde{A}_{k_s+2} + \ldots + C^{k_s+l_s} \widetilde{A}_{k_s+l_s}). \qquad (1.25)$$

Вид правой части этого равенства и равенств (1.21) и (1.22) показывает, что матрица $\widetilde{A}$ является клеточно-диагональной, каждая диагональная клетка которой в общем случае – линейная нижнетреугольная матрица [7], то есть

$$\widetilde{A} = diag(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \ldots, \widetilde{B}_m), \quad \widetilde{B}_s = \begin{pmatrix} C^{k_s+1} & 0 & \ldots & 0 \\ C^{k_s+2} & C^{k_s+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C^{k_s+l_s} & C^{k_s+l_s-1} & \ldots & C^{k_s+1} \end{pmatrix}, \quad s = 1, \ldots, m. \quad (1.26)$$

В конкретных случаях форма каждой диагональной клетки определяется фиксированными значениями постоянных $C_{k_s+1}, C_{k_s+2}, \ldots, C_{k_s+l_s}$. Например, при $C_{k_s+2} = 1, C_{k_s+3} = 0, \ldots, C_{k_s+l_s} = 0$ для всех значений *s=1, 2, ..., m* получаем множество матриц, все диагональные клетки которых являются жордановыми. Такой является матрица $\widetilde{A}_0$ оператора $\widetilde{X}_0 \widetilde{f}$ (1.11):

$$\widetilde{A}_0 = \sum_{s=1}^{m} (\lambda_s \widetilde{A}_{k_s+1} + \widetilde{A}_{k_s+2}) = diag(J_{10}, \ldots, J_{s0}, \ldots, J_{m0}), \quad J_{s0} = \begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_s & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Вернемся теперь к прежним переменным.

Обращая равенства (1.9), получаем $\overline{x} = P\overline{z}$, или

$$x^j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j z^i \equiv \overline{\beta}^j \overline{z}, \qquad (1.27)$$

где $\overline{\beta}^j$ – строки матрицы $P = \left(\beta_i^j\right)_1^n$. Переходя к прежним переменным в равенствах (1.19), (1.20), получаем равенство

$$Xf = \sum_{s=1}^{m} (C^{k_s+1} X_{k_s+1} f + C^{k_s+2} X_{k_s+2} f + \ldots + C^{k_s+l_s} X_{k_s+l_s} f), \tag{1.28}$$

и равенства

$$\begin{cases} X_{k_s+1} f = (z^{k_s+1}\beta^1_{k_s+1} + \ldots + z^{k_s+l_s}\beta^1_{k_s+l_s})\dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + (z^{k_s+1}\beta^n_{k_s+1} + \ldots + z^{k_s+l_s}\beta^n_{k_s+l_s})\dfrac{\partial f}{\partial x^n} \equiv \\ \qquad \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \eta^j_{k_s+1}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}, \\ X_{k_s+2} f = (z^{k_s+1}\beta^1_{k_s+2} + \ldots + z^{k_s+l_s-1}\beta^1_{k_s+l_s})\dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + (z^{k_s+1}\beta^n_{k_s+2} + \ldots + z^{k_s+l_s-1}\beta^n_{k_s+l_s})\dfrac{\partial f}{\partial x^n} \equiv \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \eta^j_{k_s+2}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}, \\ X_{k_s+l_s} f = z^{k_s+1}\beta^1_{k_s+l_s}\dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + z^{k_s+1}\beta^n_{k_s+l_s}\dfrac{\partial f}{\partial x^n} \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \eta^j_{k_s+l_s}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}, \end{cases} \tag{1.29}$$

в правых частях которых координаты $z^{k_s+1},\ldots,z^{k_s+l_s}$ следует заменить их выражениями по формулам (1.9). Так как коммутаторы линейных дифференциальных операторов не зависят от выбора системы координат, операторы (1.29), как и операторы (1.20), линейно независимы и попарно перестановочны. Они порождают абелеву однородную линейную группу G_n преобразований пространства $(x^1,\ldots,x^n)$, множество инфинитезимальных операторов всех однопараметрических подгрупп которой охватывается формулой (1.28) [8]. Этому множеству принадлежит оператор

$$X_0 = \sum_{s=1}^{m} (\lambda_s X_{k_s+1} f + X_{k_s+2} f). \tag{1.30}$$

Множеству операторов (1.28) соответствует множество матриц

$$A = \sum_{s=1}^{m} (C^{k_s+1} A_{k_s+1} + C^{k_s+2} A_{k_s+2} + \ldots + C^{k_s+l_s} A_{k_s+l_s}), \tag{1.31}$$

перестановочных с матрицей A_0, порожденное линейно независимыми и попарно перестановочными матрицами операторов (1.29) $A_{k_s+1}, A_{k_s+2},\ldots, A_{k_s+l_s}$. Последние можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_{k_s+1} &= P\widetilde{A}_{k_s+1}P^{-1} = \overline{\beta}_{k_s+1}\overline{\alpha}^{k_s+1} + \overline{\beta}_{k_s+2}\overline{\alpha}^{k_s+2} + \ldots + \overline{\beta}_{k_s+l_s}\overline{\alpha}^{k_s+l_s}, \\ A_{k_s+2} &= P\widetilde{A}_{k_s+2}P^{-1} = \overline{\beta}_{k_s+2}\overline{\alpha}^{k_s+1} + \ldots + \overline{\beta}_{k_s+l_s}\overline{\alpha}^{k_s+l_s-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{k_s+l_s} &= P\widetilde{A}_{k_s+l_s}P^{-1} = \overline{\beta}_{k_s+l_s}\overline{\alpha}^{k_s+1}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

где $\overline{\alpha}^{k_s+\nu}$ *(s = 1,…, m; ν = 1,…, l_s)* – векторы, координаты которых образуют строки матрицы $P^{-1} = (\alpha_i^j)_1^n$, $\overline{\beta}_{k_s+\nu}$ – векторы, координаты которых образуют столбцы матрицы $P = (\beta_i^j)_1^n$, так что имеют место равенства

$$\overline{\alpha}^j\overline{\beta}_i = \delta_i^j, \tag{1.33}$$

вытекающие из равенства $P^{-1}P = (\overline{\alpha}^j\overline{\beta}_i)_1^n = E$. Системы линейно независимых векторов $\overline{\alpha}^i, \overline{\beta}_i$ (*i = 1,…, n*), связанных между собой условиями (1.33), будем называть *взаимными*, а операторы (1.29) и их матрицы – каноническими.

Ясно, что множество матриц (1.31) является линейным векторным пространством с обычными правилами сложения матриц и умножения матрицы на число. Один из базисов этого пространства образуют канонические матрицы (1.32). Формула (1.31) представляет собой разложение произвольного вектора *A* пространства по каноническому базису. В частности, разложение матрицы A_0 по каноническому базису имеет вид

$$A_0 = \sum_{s=1}^{m}(\lambda_s A_{k_s+1} + A_{k_s+2}), \tag{1.34}$$

что следует из равенства (1.30).

Из равенств (1.23), (1.24), в силу известных свойств подобных матриц [9], следуют равенства

$$A_{k_s+1}^2 = A_{k_s+1}, \quad A_{k_s+2}^2 = A_{k_s+3}, \ \ldots, \quad A_{k_s+l_s}^2 = O, \quad A_{k_s+1}A_{k_s+\nu} = A_{k_s+\nu} \tag{1.35}$$

$$A_{k_s+1}A_{k_\sigma+\mu} = 0 \quad s,\sigma = 1,\ldots,m;\ s \neq \sigma;\ \nu = 1,\ldots,l_s;\ \mu = 1,\ldots,l_\sigma,$$

показывающие, что матрицы A_{k_s+1} являются идемпотентными, а остальные – нильпотентными, и равенство

$$\sum_{s=1}^{m} A_{k_s+1} = E \tag{1.36}$$

дает разложение единичной матрицы по каноническому базису.

Нам осталось указать смысл векторов $\overline{\alpha}^i, \overline{\beta}_i$ *(i = 1,…, n)*, при помощи которых образованы матрицы (1.32).

Действие матриц (1.32) и A_0 (1.36) на векторы $\overline{\beta}_i$ *(i = 1,…, n)* описываются равенствами

$$
\begin{aligned}
&A_{k_s+\nu}\overline{\beta}_{k_\sigma+\mu}=\overline{0} \quad (s,\sigma=1,\dots,m;\ s\neq\sigma;\ \nu=1,\dots,l_s;\ \mu=1,\dots,l_\sigma),\\
&A_{k_s+1}\overline{\beta}_{k_s+1}=\overline{\beta}_{k_s+1},\ \ A_{k_s+1}\overline{\beta}_{k_s+2}=\overline{\beta}_{k_s+2},\dots,\ A_{k_s+1}\overline{\beta}_{k_s+l_s}=\overline{\beta}_{k_s+l_s},\\
&A_{k_s+2}\overline{\beta}_{k_s+1}=\overline{\beta}_{k_s+2},\ A_{k_s+2}\overline{\beta}_{k_s+2}=\overline{\beta}_{k_s+3},\dots,\ A_{k_s+2}\overline{\beta}_{k_s+l_s}=\overline{0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_{k_s+l_s}\overline{\beta}_{k_s+1}=\overline{\beta}_{k_s+l_s},\qquad A_{k_s+l_s}\overline{\beta}_{k_s+2}=\overline{0},\dots,\qquad A_{k_s+l_s}\overline{\beta}_{k_s+l_s}=\overline{0},\\
&A_0\overline{\beta}_{k_s+1}=\lambda_s\overline{\beta}_{k_s+1}+\overline{\beta}_{k_s+2},\ A_0\overline{\beta}_{k_s+2}=\lambda_s\overline{\beta}_{k_s+2}+\overline{\beta}_{k_s+3},\dots,A_0\overline{\beta}_{k_s+l_s}=\lambda_s\overline{\beta}_{k_s+l_s}.
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Равенства, образующие первую строку и последний столбец в этой совокупности равенств, показывают, что векторы $\overline{\beta}_{k_s+l_s}$ являются общими собственными векторами попарно коммутирующих матриц (1.32), а потому и всех матриц (1.31), в частности матрицы A_0. Из равенств третьей и последней строк следует, что цепочки векторов $\overline{\beta}_{k_s+\nu}=(\nu=1,\dots,l_s)$ для матриц A_{k_s+2} и A_0 (и всех матриц вида $A=\sum_{s=1}^{m}(C^{k_s+1}A_{k_s+1}+A_{k_s+2})$) являются жордановыми. Как показывает вся совокупность равенств (1.37), общими жордановыми цепочками для всех матриц множества (1.31) указанные цепочки векторов не являются. Следует отметить, что в этих цепочках порядки присоединенных векторов [10] с увеличением их номеров убывают, то есть эти цепочки являются нижними жордановыми цепочками векторов [11]. Вместе взятые они образуют нижний жорданов базис для указанных матриц.

Переходя в равенствах (1.31), (1.32) и (1.34) к транспонированным матрицам, получаем равенство

$$A^T=\sum_{s=1}^{m}(C^{k_s+1}A^T_{k_s+1}+C^{k_s+2}A^T_{k_s+2}+\dots+C^{k_s+l_s}A^T_{k_s+l_s}), \tag{1.38}$$

равенства

$$
\begin{aligned}
&A^T_{ks+1}=\overline{\alpha}_T^{ks+1}\overline{\beta}^T_{ks+1}+\overline{\alpha}_T^{ks+2}\overline{\beta}^T_{ks+2}+\dots+\overline{\alpha}_T^{ks+ls}\overline{\beta}^T_{ks+ls},\\
&A^T_{ks+2}=\qquad\qquad \overline{\alpha}_T^{ks+1}\overline{\beta}^T_{ks+2}+\dots+\overline{\alpha}_T^{ks+ls-1}\overline{\beta}^T_{ks+ls},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A^T_{ks+ls}=\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{\alpha}_T^{ks+1}\overline{\beta}^T_{ks+ls},
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

и равенство

$$A_0^T = \sum_{s=1}^{m} (\lambda_s A_{k_s+1}^T + A_{k_s+2}^T). \qquad (1.40)$$

Действие матриц (1.39) и (1.40) на векторы $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ описываются равенствами

$$\begin{aligned}
&A_{k_s+\nu}^T \overline{\alpha}_T^{k_\sigma+\mu} = \overline{0} \quad (s,\sigma = 1,...,m; s \neq \sigma; \nu = 1,...,l_s; \mu = 1,...,l_\sigma),\\
&A_{k_s+1}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+1} = \overline{\alpha}_T^{k_s+1},\ A_{k_s+1}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+2} = \overline{\alpha}_T^{k_s+2},...,\ A_{k_s+1}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s} = \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s},\\
&A_{k_s+2}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+1} = \overline{0}, \quad A_{k_s+2}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+2} = \overline{\alpha}_T^{k_s+1},...,\ A_{k_s+2}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s} = \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s-1},\\
&...\\
&A_{k_s+l_s}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+1} = \overline{0}, \quad A_{k_s+l_s}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+2} = \overline{0} \ ,...,\ A_{k_s+l_s}^T \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s} = \overline{\alpha}_T^{k_s+1},\\
&A_0^T \overline{\alpha}_T^{k_s+1} = \lambda_s \overline{\alpha}_T^{k_s+1},\ A_0^T \overline{\alpha}_T^{k_s+2} = \lambda_s \overline{\alpha}_T^{k_s+2} + \overline{\alpha}_T^{k_s+3},...,A_0^T \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s} = \lambda_s \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s} + \overline{\alpha}_T^{k_s+l_s-1}
\end{aligned} \qquad (1.41)$$

Равенства, образующие в этой системе равенств первый столбец, показывают, что векторы $\overline{\alpha}^{k_s+1}$ являются общими собственными векторами матриц (1.39), а потому и всех матриц (1.38), в частности матрицы A_0^T. Из равенств, образующих третью и последнюю строки, следует, что цепочки векторов $\overline{\alpha}^{k_s+\nu}$ $(\nu = 1,...,l_s)$ для матриц $A_{k_s+2}^T$, A_0^T (и всех матриц вида $A^T = \sum_{s=1}^{m} (C^{k_s+1} A_{k_s+1}^T + A_{k_s+2}^T))$ являются жордановыми. Как показывает вся совокупность равенств (1.41), указанные цепочки векторов не являются общими жордановыми цепочками для всех матриц множества (1.38). Следует отметить, что в этих цепочках порядки присоединенных векторов возрастают вместе с возрастанием их номеров, то есть эти цепочки являются верхними жордановыми цепочками векторов. Вместе взятые они образуют верхний жорданов базис для указанных матриц.

Замечание 1.1. Тот факт, что векторы $\overline{\beta}_1,...,\overline{\beta}_n$ образуют нижний жорданов базис, а векторы $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ – верхний, принципиального значения не имеет и изначально предопределен тем, что преобразование (1.9) приводит матрицу A_0 к нижней нормальной жордановой форме.

Таким образом, столбцы $\overline{\beta}_1,...,\overline{\beta}_n$ матрицы $P = (\beta_i^j)_1^n$ образуют жорданов базис матрицы A_0. Обращение матрицы P дает матрицу $P^{-1} = (\alpha_i^j)_1^n$, строки $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ которой образуют жорданов базис матрицы A_0^T. Линейное преобразование с матрицей *P* приводит матрицу A_0 к нормальной жордановой форме:

$$\widetilde{A}_0 \equiv J_0 = P^{-1}A_0P. \tag{1.42}$$

Так как

$$\widetilde{A}_0^T \equiv J_0^T = P^T A_0^T \left(P^{-1}\right)^T, \tag{1.43}$$

то линейное преобразование, приводящее матрицу A_0^T к нормальной жордановой форме, имеет матрицу $\left(P^{-1}\right)^T$. Обращение этой матрицы дает матрицу P^T.

Отметим отдельно случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1.1) простые. В этом случае, как легко сообразить, канонические операторы имеют вид

$$\begin{gathered}
X_1 f = (\alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 + ... + \alpha_n^1 x^n)(\beta_1^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + ... + \beta_1^n \frac{\partial f}{\partial x^n}), \\
.... \\
X_n f = (\alpha_1^n x^1 + \alpha_2^n x^2 + ... + \alpha_n^n x^n)(\beta_n^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + ... + \beta_n^n \frac{\partial f}{\partial x^n}),
\end{gathered} \tag{1.44}$$

где $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ – линейно независимые собственные векторы матрицы A_0^T, $\overline{\beta}_1,...,\overline{\beta}_n$ – линейно независимые собственные векторы матрицы A_0. Их матрицы представляются в виде

$$A_1 = \overline{\beta}_1 \overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1\beta_1^1 ... \alpha_n^1\beta_1^1 \\ ... \; ... \; ... \\ \alpha_1^1\beta_1^n ... \alpha_n^1\beta_1^n \end{pmatrix}, ..., A_n = \overline{\beta}_n \, \overline{\alpha}^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n\beta_n^1 ... \alpha_n^n\beta_n^1 \\ ... \; ... \; ... \\ \alpha_1^n\beta_n^n ... \alpha_n^n\beta_n^n \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Попарно перестановочные линейно независимые операторы (1.44) порождают абелеву линейную однородную группу G_n преобразований пространства $(x^1,...,x^n)$, множество инфинитезимальных операторов всех однопараметрических подгрупп которой охватывается формулой

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} C^i X_i f. \tag{1.46}$$

Этому множеству принадлежит оператор

$$X_0 f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i f \, , \tag{1.47}$$

где λ_i – собственные числа матрицы A_0.

Множеству операторов (1.46) соответствует множество попарно перестановочных матриц

$$A = \sum_{i=1}^{n} C^i A_i \, , \tag{1.48}$$

порождаемое линейно независимыми попарно перестановочными матрицами (1.45). Этому множеству принадлежит матрица A_0, представляемая в виде разложения по каноническому базису (1.45):

$$A_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \, . \tag{1.49}$$

Легко убедиться, что векторы $\overline{\beta}_1,...,\overline{\beta}_n$ являются общими собственными векторами матриц (1.45), а потому и всех матриц, принадлежащих множеству (1.48). Следовательно, все эти матрицы преобразованием с матрицей $P = (\beta_i^j)_1^n$ приводятся к диагональному виду.

Легко также убедиться, что векторы $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ являются общими собственными векторами всех матриц, полученных транспонированием матриц (1.45), (1.48). Следовательно, все эти матрицы преобразованием с матрицей $(P^{-1})^T$ приводятся к диагональному виду.

Изложенное выше позволяет сформулировать следующие теоремы:

Теорема 1.1. Любая однородная линейная группа G_1 с оператором $X_{A_0} f$ является однопараметрической подгруппой абелевой линейной однородной группы G_n, порожденной каноническими операторами (1.29), соответствующими данному выбору взаимных жордановых базисов матриц A_0 и A_0^T. Преобразованиями группы G_n являются преобразования всех однопараметрических групп, порождаемых операторами (1.29), и произведения таких преобразований.

Теорема 1.2. Любая квадратная матрица A_0 *n*-го порядка принадлежит множеству (1.31) попарно перестановочных матриц того же порядка, порожденному линейно независимыми, попарно перестановочными каноническими матрицами (1.32), соответствующими данному выбору взаимных жордановых базисов матриц A_0 и A_0^T. Представление матрицы A_0 через канонические матрицы определяется равенствами (1.31).

Заметим, что равенства (1.31) и (1.32) можно рассматривать сами по себе, не привязывая их к какой-либо определенной матрице A_0. Это замечание позволяет сформулировать следующие теоремы:

Теорема 1.3. Всяким двум системам линейно независимых векторов $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ и $\overline{\beta}_1,...,\overline{\beta}_n$, связанным между собой условиями (1.33), соответствует множество попарно коммутирующих матриц (1.31), порожденное каноническими матрицами (1.32), соответствующими выбранному разбиению указанных систем векторов на жордановы цепочки.

Теорема 1.4. Всяким двум системам линейно независимых векторов $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^n$ и $\overline{\beta}_1,...,\overline{\beta}_n$, связанным между собой условиями (1.33), соответствует абелева однородная линейная группа G_n, порожденная каноническими операторами (1.29), соответствующими выбранному разбиению указанных систем векторов на жордановы цепочки.

По поводу этих теорем см. пример 4.1.

2. Пусть G_n – абелева однородная линейная группа, соответствующая системе (1.1), и

$$X_i f = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad (i = 1,...,n) - \tag{2.1}$$

любая совокупность ее *n* линейно независимых операторов.

Определение 2.1. Матрицу

$$\boldsymbol{M} = (\xi_i^j)_1^n, \tag{2.2}$$

составленную из координат операторов (2.1), будем называть определяющей матрицей группы G_n, а определитель

$$M = |\boldsymbol{M}| \tag{2.3}$$

будем называть определяющей функцией этой группы.

Заметим, что матрица $\boldsymbol{M}$ определена неоднозначно, так как неоднозначен выбор операторов (2.1). В силу линейной независимости операторов (2.1) ранг матрицы $\boldsymbol{M}$ для общих значений $x^1,...,x^n$ (общий ранг) равен *n*. Следовательно, для общих значений $x^1,...,x^n$ определитель (2.3) отличен от нуля.

В силу теоремы 1.1, операторы (2.1) являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами канонических операторов (1.29). Поэтому имеет место равенство

$$\xi_i^j = \sum_{k=1}^{n} C_i^k \eta_k^j .$$

Следовательно, матрица (2.2) может быть записана в виде

$$\boldsymbol{M} = \left(\sum_{k=1}^{n} C_i^k \eta_k^j \right)_1^n = \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{M}} ,$$

где $\boldsymbol{C} = (C_i^k)_1^n$ и $\widehat{\boldsymbol{M}} = (\eta_k^i)_1^n$ – невырожденные матрицы, так как совокупности операторов (1.29) и (2.1) состоят из линейно независимых операторов.

Далее, из формул (1.29) следует, что матрицу $\widehat{\boldsymbol{M}}$ можно получить, если матрицу

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = diag(\widetilde{\boldsymbol{M}}_1, \widetilde{\boldsymbol{M}}_2, ..., \widetilde{\boldsymbol{M}}_m) , \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_s = \begin{pmatrix} z^{k_s+1} & z^{k_s+2} & ... & z^{k_s+l_s} \\ 0 & z^{k_s+1} & ... & z^{k_s+l_s-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & z^{k_s+1} \end{pmatrix} \quad (z^{k_s+\nu} = \overline{\alpha}^{k_s+\nu}\overline{x},\ s = 1,...,m, \nu = 1,...,l_s) , \tag{2.5}$$

умножить справа на матрицу $\boldsymbol{P}^T$:

$$\widehat{\boldsymbol{M}} = \widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{P}^T$$

Следовательно, окончательно матрица $\boldsymbol{M}$ представляется в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{P}^T . \tag{2.6}$$

Матрицу (2.4) с клетками (2.5) будем называть канонической определяющей матрицей группы G_n.

Равенство (2.6) выражает важный для дальнейшего результат:

Теорема 2.1. Любая определяющая матрица **M** абелевой однородной линейной группы G_n, соответствующей системе (1.1), эквивалентна канонической матрице $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ этой группы.

Из этой теоремы следует, что, зная произвольную определяющую матрицу $\boldsymbol{M}$, соответствующую системе (1.1) абелевой однородной линейной групппы G_n, можно получить каноническую определяющую матрицу $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ этой группы при помощи элементарных операций, состоящих: 1) в перестановке любых двух строк (столбцов) преобразуемой матрицы, 2) умножении любой строки (столбца) преобразуемой матрицы на любое, отличное от нуля число, 3) прибавлении ко всем элементам некоторой строки (столбца) преобразуемой матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число. Знание же матрицы $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ дает все формы $z^{k_s+\nu} = \overline{\alpha}^{k_s+\nu}\overline{x}\ (s=1,...,m; \nu=1,...,l_s)$, а значит и все жордановы цепочки векторов $\overline{\alpha}^{k_s+1}, \overline{\alpha}^{k_s+2}, ..., \overline{\alpha}^{k_s+l_s}\ (s=1,...,m)$ матрицы A_0^T, после чего задача интегрирования системы (1.1) уже не вызывает затруднений.

В силу известных свойств определителей квадратных матриц, из равенства (2.6) следует равенство

$$M = |\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{C}|\left|\widetilde{\boldsymbol{M}}\right|\left|\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}\right|,$$

которое, учитывая равенства (2.4) и (2.5), можно переписать в виде

$$M = \gamma(\overline{\alpha}^1\overline{x})^{l_1} \cdot (\overline{\alpha}^{k_2+1}\overline{x})^{l_2} \cdot ... \cdot (\overline{\alpha}^{k_m+1}\overline{x})^{l_m} \quad (\gamma = |\boldsymbol{C}|\left|\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}\right|). \tag{2.7}$$

Формула (2.7) показывает, что функция M, являющаяся произведением n линейных и однородных относительно $x^1,...,x^n$ функций с постоянными коэффициентами, после перемножения этих функций представляется в виде однородной относительно указанных переменных функции степени n.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.2. Каждой однородной линейной дифференциальной системе с постоянной матрицей A_0 может быть поставлена в соответствие однородная относительно переменных $x^1,...,x^n$ функция степени n, представимая в виде (2.7), соответствующем данному выбору независимых собственных векторов $\overline{\alpha}^{k_s+1}\ (s=1,...,m)$ матрицы A_0^T.

Значение этой теоремы состоит в том, что она позволяет указать способ вычисления (с любой степенью точности) координат собственных векторов матрицы A_0^T, минуя процедуру составления ее характеристического уравнения и нахождения его корней. Этот способ мы подробно изложим применительно к системам третьего порядка, поскольку полученные в итоге результаты допускают очевидное обобщение.

Пусть $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ – независимые операторы однородной линейной абелевой группы G_3, одной из подгрупп которой является подгруппа G_1 с оператором $X_0 f$. Функция $M_3(x^1, x^2, x^3)$ для этой совокупности операторов записывается в виде

$$M_3(x^1,x^2,x^3) = \begin{vmatrix} a_{11}^1 x^1 + a_{21}^1 x^2 + a_{31}^1 x^3 & a_{11}^2 x^1 + a_{21}^2 x^2 + a_{31}^2 x^3 & a_{11}^3 x^1 + a_{21}^3 x^2 + a_{31}^3 x^3 \\ a_{12}^1 x^1 + a_{22}^1 x^2 + a_{32}^1 x^3 & a_{12}^2 x^1 + a_{22}^2 x^2 + a_{32}^2 x^3 & a_{12}^3 x^1 + a_{22}^3 x^2 + a_{32}^3 x^3 \\ a_{13}^1 x^1 + a_{23}^1 x^2 + a_{33}^1 x^3 & a_{13}^2 x^1 + a_{23}^2 x^2 + a_{33}^2 x^3 & a_{13}^3 x^1 + a_{23}^3 x^2 + a_{33}^3 x^3 \end{vmatrix}, \quad (2.8)$$

или – после развертывания определителя в правой части любым известным способом – в виде

$$\begin{aligned} M_3(x^1,x^2,x^3) &= a_{111}(x^1)^3 + a_{222}(x^2)^3 + a_{333}(x^3)^3 + a_{112}(x^1)^2 x^2 + a_{113}(x^1)^2 x^3 + \\ &+ a_{223}(x^2)^2 x^3 + a_{122} x^1 (x^2)^2 + a_{133} x^1 (x^3)^2 + a_{233} x^2 (x^3)^2 + a_{123} x^1 x^2 x^3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

(здесь принята система обозначений: a_{111} – коэффициент при $x^1 \cdot x^1 \cdot x^1 = (x^1)^3$, a_{112} – коэффициент при $x^1 \cdot x^1 \cdot x^2 = (x^1)^2 x^2$ и т.д.).

С другой стороны, согласно равенству (2.7), для нашего случая имеем

$$\begin{aligned} & M_3(x^1,x^2,x^3) = (\alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 + \alpha_3^1 x^3)(\alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_3^2 x^3)(\alpha_1^3 x^1 + \alpha_2^3 x^2 + \alpha_3^3 x^3) = \\ & = \alpha_1^1(\alpha_1^2 \alpha_1^3)(x^1)^3 + \alpha_2^1(\alpha_2^2 \alpha_2^3)(x^2)^3 + \alpha_3^1(\alpha_3^2 \alpha_3^3)(x^3)^3 + \\ & + [\alpha_1^1(\alpha_1^2 \alpha_2^3 + \alpha_2^2 \alpha_1^3) + \alpha_2^1(\alpha_1^2 \alpha_1^3)](x^1)^3 x^2 + [\alpha_1^1(\alpha_1^2 \alpha_3^3 + \alpha_3^2 \alpha_1^3) + \alpha_3^1(\alpha_1^2 \alpha_1^3)](x^1)^3 x^3 + \\ & + [\alpha_1^1(\alpha_2^2 \alpha_2^3) + \alpha_2^1(\alpha_1^2 \alpha_2^3 + \alpha_2^2 \alpha_1^3)] x^1 (x^2)^2 + [\alpha_1^1(\alpha_3^2 \alpha_3^3) + \alpha_3^1(\alpha_1^2 \alpha_3^3 + \alpha_3^2 \alpha_1^3)] x^1 (x^3)^2 + \\ & + [\alpha_2^1(\alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_3^2 \alpha_2^3) + \alpha_3^1(\alpha_2^2 \alpha_2^3)](x^2)^2 x^3 + [\alpha_2^1(\alpha_3^2 \alpha_3^3) + \alpha_3^1(\alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_3^2 \alpha_2^3)] x^2 (x^3)^2 + \\ & + [\alpha_1^1(\alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_3^2 \alpha_2^3) + \alpha_2^1(\alpha_1^2 \alpha_3^3 + \alpha_3^2 \alpha_1^3) + \alpha_3^1(\alpha_1^2 \alpha_2^3 + \alpha_2^2 \alpha_1^3)] x^1 x^2 x^3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где в круглые скобки заключены коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ квадратичной формы $M_2(x^1,x^2,x^3) = (\alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_3^2 x^3)(\alpha_1^3 x^1 + \alpha_2^3 x^2 + \alpha_3^3 x^3)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах в выражениях (2.9) и (2.10), получаем равенства

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1^1(\alpha_1^2\alpha_1^3) = \alpha_1^1 a_{11} = a_{111},\\
&\alpha_2^1(\alpha_2^2\alpha_2^3) = \alpha_2^1 a_{22} = a_{333},\\
&\alpha_3^1(\alpha_3^2\alpha_3^3) = \alpha_3^1 a_{33} = a_{333},\\
&\alpha_1^1(\alpha_1^2\alpha_2^3 + \alpha_2^2\alpha_1^3) + \alpha_2^1(\alpha_1^2\alpha_1^3) = \alpha_1^1 2a_{12} + \alpha_2^1 a_{11} = a_{112},\\
&\alpha_1^1(\alpha_1^2\alpha_3^3 + \alpha_3^2\alpha_1^3) + \alpha_3^1(\alpha_1^2\alpha_1^3) = \alpha_1^1 2a_{13} + \alpha_3^1 a_{11} = a_{113},\\
&\alpha_1^1(\alpha_2^2\alpha_2^3) + \alpha_2^1(\alpha_1^2\alpha_2^3 + \alpha_2^2\alpha_1^3) = \alpha_1^1 a_{22} + \alpha_2^1 2a_{12} = a_{122},\\
&\alpha_1^1(\alpha_3^2\alpha_3^3) + \alpha_3^1(\alpha_1^2\alpha_3^3 + \alpha_3^2\alpha_1^3) = \alpha_1^1 a_{22} + \alpha_3^1 2a_{13} = a_{133},\\
&\alpha_2^1(\alpha_2^2\alpha_3^3 + \alpha_3^2\alpha_2^3) + \alpha_3^1(\alpha_2^2\alpha_2^3) = \alpha_2^1 2a_{23} + \alpha_2^1 a_{22} = a_{223}, \qquad (2.11)\\
&\alpha_2^1(\alpha_3^2\alpha_3^3) + \alpha_3^1(\alpha_2^2\alpha_3^3 + \alpha_3^2\alpha_2^3) = \alpha_2^1 a_{33} + \alpha_3^1 2a_{23} = a_{233},\\
&\alpha_1^1(\alpha_2^2\alpha_3^3 + \alpha_3^2\alpha_2^3) + \alpha_2^1(\alpha_1^2\alpha_3^3 + \alpha_3^2\alpha_1^3) + \alpha_3^1(\alpha_1^2\alpha_2^3 + \alpha_2^2\alpha_1^3) = \alpha_1^1 2a_{23} + \alpha_2^1 2a_{13} + \alpha_3^1 2a_{12} = a_{123}.
\end{aligned}
$$

Исключая из первых девяти уравнений (2.11), связывающих между собой координаты собственного вектора и коэффициенты форм второй и третьей степени, коэффициенты формы второй степени, получаем уравнения

$$
\begin{aligned}
&a_{111}(\alpha_2)^3 - a_{112}\alpha_1(\alpha_2)^2 + a_{122}(\alpha_1)^2\alpha_2 - a_{222}(\alpha_1)^3 = 0,\\
&a_{111}(\alpha_3)^3 - a_{113}\alpha_1(\alpha_3)^2 + a_{133}(\alpha_1)^2\alpha_3 - a_{333}(\alpha_1)^3 = 0, \qquad (2.12)\\
&a_{222}(\alpha_3)^3 - a_{223}\alpha_2(\alpha_3)^2 + a_{233}(\alpha_2)^2\alpha_3 - a_{333}(\alpha_2)^3 = 0,
\end{aligned}
$$

в которых верхний индекс у координат собственного вектора опущен в связи с утерей его смысла.

Очевидное обобщение формул (2.12) на случай системы вида (1.1) порядка n имеет вид

$$
\begin{aligned}
&a_{11\ldots11}(\alpha_2)^n - a_{11\ldots12}(\alpha_2)^{n-1}\alpha_1 + a_{11\ldots22}(\alpha_2)^{n-2}(\alpha_1)^2 - \ldots - a_{22\ldots22}(\alpha_1)^n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{11\ldots11}(\alpha_n)^n - a_{11\ldots1n}(\alpha_n)^{n-1}\alpha_1 + a_{11\ldots nn}(\alpha_n)^{n-2}(\alpha_1)^2 - \ldots - a_{nn\ldots nn}(\alpha_1)^n = 0,\\
&a_{22\ldots22}(\alpha_3)^n - a_{22\ldots23}(\alpha_3)^{n-1}\alpha_2 + a_{22\ldots33}(\alpha_3)^{n-2}(\alpha_2)^2 - \ldots - a_{33\ldots33}(\alpha_2)^n = 0, \qquad (2.13)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)(n-1)}(\alpha_n)^n - a_{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)n}(\alpha_n)^{n-1}\alpha_{n-1} + a_{(n-1)(n-1)\ldots nn}(\alpha_n)^{n-2}(\alpha_{n-1})^2 - \ldots\\
&- a_{nn\ldots nn}(\alpha_{n-1})^n = 0.
\end{aligned}
$$

Всего, как легко сообразить, имеем $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$ уравнений. Каждое уравнение содержит $n+1$ коэффициент. Следовательно, в уравнениях (2.13) всего $N(n+1) = \dfrac{n(n^2-1)}{2}$ коэффициентов. Каждый из n коэффициентов $a_{11\ldots1},\ldots,a_{nn\ldots n}$ встречается в уравнениях (2.13) $(n-1)$ раз, так что всего в этих уравнениях $N(n+1) - n(n-2) = \dfrac{n(n^2-2n+3)}{2} = N_2$ различных коэффициентов.

Форма n-й степени относительно n переменных содержит всего

$$C_{2n-1}^{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = N_1$$

коэффициентов (не обязательно отличных от нуля). Столько одночленов вида

$$A(x^1)^{k_1}(x^2)^{k_2}\ldots(x^n)^{k_n} \qquad (k_1+k_2+\ldots+k_n=n)$$

содержится в форме $M_n(x^1,\ldots,x^n)$ общего вида [12]. Таким образом, для составления уравнений (2.13) из общего числа N_1 коэффициентов формы $M_n(x^1,\ldots,x^n)$ требуется знание только N_2 ее коэффициентов. Например, пользуясь приведенными формулами, легко подсчитать, что из 35 коэффициентов формы $M_4(x^1,\ldots,x^4)$ для составления уравнений вида (2.13) нужно знать только 22 ее коэффициента. Естественным поэтому является желание иметь формулы для вычисления указанных коэффициентов, минуя процедуру получения явного выражения для формы $M_n(x^1,\ldots,x^n)$.

Покажем сначала, как находятся коэффициенты формы $M_3(x^1,x^2,x^3)$.

Если вычислять определитель (2.8) при помощи разложения по элементам первой строки, получим

$$\begin{aligned}
a_{111} &= a_{11}^1(a_{12}^2a_{13}^3 - a_{12}^3a_{13}^2) - a_{11}^2(a_{12}^1a_{13}^3 - a_{12}^3a_{13}^1) + a_{11}^3(a_{12}^1a_{13}^2 - a_{12}^2a_{13}^1),\\
a_{112} &= a_{11}^1(a_{12}^2a_{23}^3 - a_{12}^3a_{23}^2 + a_{22}^2a_{13}^3 - a_{22}^3a_{13}^2) + a_{21}^1(a_{12}^2a_{13}^3 - a_{12}^3a_{13}^2) -\\
&\quad - a_{11}^2(a_{12}^1a_{23}^3 - a_{12}^3a_{23}^1 + a_{22}^1a_{13}^3 - a_{22}^3a_{13}^1) - a_{21}^2(a_{12}^1a_{13}^3 - a_{12}^3a_{13}^1) +\\
&\quad - a_{11}^3(a_{12}^1a_{23}^2 - a_{12}^2a_{23}^1 + a_{22}^1a_{13}^2 - a_{22}^2a_{13}^1) + a_{21}^3(a_{12}^1a_{13}^2 - a_{12}^2a_{13}^1)
\end{aligned}$$

и т.д.

Запишем теперь 3×9 -матрицу

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{21}^1 & a_{31}^1 & a_{12}^1 & a_{22}^1 & a_{32}^1 & a_{13}^1 & a_{23}^1 & a_{33}^1 \\ a_{11}^2 & a_{21}^2 & a_{31}^2 & a_{12}^2 & a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{33}^2 \\ a_{11}^3 & a_{21}^3 & a_{31}^3 & a_{12}^3 & a_{22}^3 & a_{32}^3 & a_{13}^3 & a_{23}^3 & a_{33}^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Как видим, эта матрица состоит из трех блоков, каждый из которых имеет три столбца. У каждого элемента матрицы второй нижний индекс фиксирует номер блока, в котором он расположен, а первый – номер столбца в данном блоке. Выбирая произвольно по одному столбцу из каждого блока, будем располагать их в порядке следования блоков. Тогда определитель, составленный из этих столбцов, символически можно записать в виде $|i \;\; j \;\; k| \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$, указывая тем самым, что на первом месте расположен *i*-й столбец первого блока, на втором – *j*-й столбец второго блока, на третьем – *k*-й столбец третьего блока.

Используя эту символику, нетрудно заметить, что указанные выше коэффициенты можно представить равенствами

$$a_{111}=|111|, \qquad a_{112}=|112|+|121|+|211|$$

и, далее, по аналогии с этими равенствами,

$$a_{122}=|122|+|212|+|221|,\;\; a_{113}=|113|+|131|+|311|,\;\; a_{133}=|133|+|313|+|331|,$$
$$a_{223}=|223|+|232|+|323|,\;\; a_{233}=|233|+|323|+|332|,\;\; a_{222}=|222|,\;\; a_{333}=|333|.$$

Теперь легко указать формулы для вычисления коэффициентов, входящих в уравнения (2.13). Каждый из них представляется в виде $a_{i..ik..k} \quad (i, j=1,...,n)$, где i повторяется α раз и k повторяется β раз $(\alpha+\beta=n)$. Обобщая предыдущие формулы, получаем

$$a_{i..ik..k}=|i...ik...k|+...+|k...ki...i|, \tag{2.14}$$

где все определители образованы всевозможными перестановками *n* столбцов с повторяющимся α раз номером *i* и повторяющимся β раз номером *k*. Число таких перестановок, как известно, равно

$$P=\frac{n!}{\alpha!\beta!}.$$

Столбцы, фигурирующие в этих формулах, берутся из $n \times n^2$-матрицы

$$B = \left(A_1 \; A_2 \; \ldots \; A_n\right).$$

Например, в случае $M = M_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$ коэффициент a_{1122} представляется в виде суммы $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ определителей:

$$a_{1122} = |1122| + |1212| + |1221| + |2112| + |2121| + |2211|.$$

Вернемся к равенствам (2.11). Последнее из этих равенств осталось неиспользованным, и может показаться, что одночлен $a_{123}x^1x^2x^3$ никакого влияния на представимость формы $M_3(x^1, x^2, x^3)$ в виде произведения трех линейных форм не оказывает.

На самом деле это не так. Дело в том, что до сих пор мы исходили из того факта, что представление формы $M_3(x^1, x^2, x^3)$ в указанном виде существует. Поэтому сходимость любого вычислительного процесса, основанного на уравнениях (2.12), гарантируется самим существованием равенства (2.10). Следовательно, найденные при помощи уравнений (2.12) координаты векторов $\overline{\alpha}^1, \overline{\alpha}^2, \overline{\alpha}^3$ будут автоматически обеспечивать выполнение последнего из равенств (2.11), которое, таким образом, можно использовать для контроля правильности вычислений.

Естественно поставить вопрос: всякая ли форма третьей степени относительно трех независимых переменных может быть представлена в виде произведения трех линейных форм относительно тех же переменных. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.3. Форма третьей степени относительно трех независимых переменных представима в виде произведения трех линейных форм относительно тех же переменных тогда и только тогда, когда система уравнений, состоящая из уравнений (2.12) и последнего из уравнений (2.11), совместна.

Аналогичную теорему можно сформулировать для формы n-й степени относительно n независимых переменных, но, поскольку она нам в дальнейшем не понадобится, мы не будем этого делать.

Замечание 2.1. Степени $l_1, \ldots, l_m$, в которые возводятся формы $z^{k_s+1} = \overline{\alpha}^{k_s+1}\overline{x}$ $(s = 1, \ldots, m)$ в формуле (2.7), можно назвать кратностями этих форм в разложении функции M на множители и одновременно кратностями собственных векторов $\overline{\alpha}^{k_s+1}$ $(s = 1, \ldots, m)$ матрицы A_0, так как они действительно являются кратными «корнями» уравнений (2.13). Так как числа $l_1, \ldots, l_m$ определяют также размеры жордановых клеток в жордановом представлении матрицы A_0, то можно утверждать, что каждому собственному вектору матрицы кратности l_s соответствует в указанном представлении матрицы жорданова клетка размером $l_s \times l_s$. Поэтому знание кратностей собственных векторов матрицы A_0 позволяет выписать ее жорданову форму в общем виде еще до того, как будут определены ее собственные числа.

3. В связи с полученными в пунктах 1, 2 результатами на первый план выступает задача нахождения множеств попарно перестановочных матриц, перестановочных с заданной матрицей A_0.

Одним из таких подмножеств является множество всех степеней матрицы A_0 [13]:

$$A_0^0 = E, A_0^1 = A_0, A_0^2, ..., A_0^n, ... \tag{3.1}$$

Так как в этом множестве матриц не может быть более n линейно независимых, то любые $n + 1$ из них линейно зависимы. Например, линейно зависимы первые $n + 1$ из матриц (3.1). Поэтому существуют не все равные нулю числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$, при которых имеет место равенство

$$\alpha_n E + \alpha_{n-1} A_0 + \alpha_{n-2} A_0^2 + ..., \alpha_1 A_0^{n-1} + A_0^n = 0. \tag{3.2}$$

Из этого равенства следует, что матрица A_0^n является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами всех предыдущих степеней матрицы A_0:

$$A_0^n = \alpha_1 A_0^{n-1} - ... - \alpha_{n-1} A_0 - \alpha_n E.$$

Пользуясь этим равенством, легко показать, что и все последующие степени матрицы A_0 линейно с постоянными коэффициентами выражаются через те же матрицы. Отсюда следует, что максимальное число линейно независимых степеней матрицы A_0 всегда можно найти (известными способами) среди n ее первых степеней.

Коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_n$, содержащиеся в равенстве (3.2), находятся из соответствующей этому равенству системы линейных уравнений

$$\delta_j^i \alpha_n + \alpha_{n-1} a_{j1}^i + \alpha_{n-2} a_{j2}^i + ... + \alpha_1 a_{jn-1}^i + a_{jn}^i = 0, \tag{3.3}$$

где δ_j^i – символ Кронекера (остальные обозначения пояснений не требуют). Согласно тождеству Гамильтона – Кэли [14], эта система всегда имеет решение

$\alpha_1 = p_1,...,\alpha_n = p_n$, где $p_1,...,p_n$ – коэффициенты характеристического многочлена матрицы A_0:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 .$$

Если число линейно независимых уравнений в системе (3.3) равно *n*, то указанное решение является ее единственным решением. Если же число линейно независимых уравнений в системе (3.3) меньше *n*, то она имеет бесконечное множество решений, одно из которых дает коэффициенты минимального многочлена матрицы A_0. Чтобы получить в этом случае указанное решение, можно те из коэффициентов $\alpha_1,...,\alpha_n$, которые выбраны в качестве свободных параметров, задать при помощи формул, определяющих коэффициенты характеристического многочлена матрицы A_0 через ее диагональные миноры.

Из сказанного выше вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. Если $rang\left(E, A_0^1, A_0^2,..., A_0^n\right) = n$, то коэффициенты $p_1,...,p_n$ характеристического многочлена матрицы A_0 образуют единственное решение системы (3.3), соответствующей матричному равенству (3.2). Если же $rang\left(E, A_0^1, A_0^2,..., A_0^n\right) = r < n$, то при помощи системы (3.3) можно найти **r** из указанных коэффициентов при условии, что в системе (3.3) неизвестные коэффициенты характеристического многочлена, принятые в качестве свободных параметров, будут предварительно каким-либо образом вычислены. В этом случае можно найти также коэффициенты минимального многочлена матрицы A_0.

Таким образом, мы имеем еще один метод (в дополнение к уже известным [15]) вычисления коэффициентов характеристического многочлена произвольной матрицы. В имеющейся литературе по численным методам линейной алгебры этот метод не описан.

Возвращаясь к поставленной выше задаче, заметим, что ее можно решить иначе: сначала найти множество всех матриц, перестановочных с данной матрицей A_0, то есть решить так называемую задачу Фробениуса [16], а затем из этого множества выбрать *n* линейно независимых, попарно коммутирующих матриц. Решение этой задачи, использующее приведение матрицы к нормальной жордановой форме, содержится, например, в [17]. Решать ее можно и непосредственно, используя определение перестановочности матриц A_0 и *A*, что приводит к равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{j0}^i a_k^j - a_j^i a_{k0}^j) = 0 \quad (i, k = 1,...,n), \tag{3.4}$$

которые после некоторых преобразований приводятся к следующему, удобному для применения виду

$$\begin{aligned} &(A_0^T - a_{10}^1 E)\overline{a}^{1T} - a_{20}^1 E\overline{a}^{2T} - \ldots - a_{n0}^1 E\overline{a}^{nT} = 0, \\ &- a_{10}^2 E\overline{a}^{1T} + (A_0^T - a_{20}^2 E)\overline{a}^{2T} - \ldots - a_{n0}^2 E\overline{a}^{nT} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- a_{10}^n E\overline{a}^{1T} - a_{20}^n E\overline{a}^{2T} - \ldots - (A_0^T - a_{n0}^n E)\overline{a}^{nT} = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Это – линейная однородная система n^2 уравнений относительно n^2 неизвестных элементов матрицы $A = \left(a_j^i\right)_1^n$. Ее матрица записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A_0^T - a_{10}^1 E & -a_{20}^1 E & \ldots & -a_{n0}^1 E \\ -a_{10}^2 E & A_0^T - a_{20}^2 E & \ldots & -a_{n0}^2 E \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{10}^n E & -a_{20}^n E & \ldots & A_0^T - a_{n0}^n E \end{pmatrix} = (\delta_i^j A_0^T - a_{i0}^j E)_1^n. \tag{3.6}$$

Так как минимальное число линейно независимых матриц, перестановочных с матрицей A_0, равно n [18], ранг этой матрицы не может быть больше $n^2 - n$, что согласуется с теоремой 1.2. Общее решение системы (3.5) можно найти при помощи метода Гаусса.

4. Полная проблема собственных чисел обычно решается по схеме «собственное число → собственный вектор», в которой нахождению собственных векторов матрицы предшествует нахождение ее собственных чисел, что и приводит к общеизвестным осложнениям. Поэтому, естественно, возникает мысль о том, нельзя ли находить собственные векторы данной матрицы, минуя процедуру составления ее характеристического уравнения и нахождения его корней, то есть решать указанную проблему по обращенной схеме «собственный вектор → собственное число». В пункте 3 мы убедились, что реализация этой схемы вполне возможна и указали способ вычисления координат собственных векторов матриц, не требующий знания их собственных чисел. Этот способ всегда приводит к цели, однако, имеет существенный недостаток, заключающийся в необходимости решать большое количество алгебраических уравнений высоких степеней при рассмотрении матриц высоких порядков. Поэтому представляют интерес
и другие (может быть, нерегулярные) методы реализации указанной схемы.

Один из таких методов основан на использовании целых неотрицательных степеней данной матрицы A_0. Будучи попарно перестановочными, все эти матрицы представляются в виде линейных комбинаций с постоянными коэффициентами канонических матриц, построенных с помощью взаимных жордановых базисов матриц A_0 и A_0^T. Суть метода состоит в нахождении таких линейных с постоянными коэффициентами комбинаций этих матриц, которые представлялись бы в виде линейных с постоянными коэффициентами комбинаций канонических матриц, что дает определенную информацию о собственных и присоединенных векторах матриц A_0 и A_0^T. Коэффициенты указанных линейных комбинаций определяются исходя из конкретного вида используемых матриц, поэтому значительную роль в методе играет элемент догадки. Однако, как показывают многочисленные примеры, во многих случаях его применение быстро приводит к цели.

Пусть, например, указанным методом найдена матрица

$$A = \overline{\beta}\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} \beta 1 \\ \vdots \\ \beta n \end{pmatrix} \left(\alpha_1 \ldots \alpha_n\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta 1 \ldots \alpha_n \beta 1 \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \\ \alpha_1 \beta n \ldots \alpha_n \beta n \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где векторы $\overline{\beta}$ и $\overline{\alpha}$ являются собственными векторами соответственно матриц A_0 и A_0^T. Именно таковы канонические матрицы $A_{k_s+l_s}$ $(s = 1,..., m)$, принадлежащие множеству матриц (1.32), а также все матрицы (1.45). Для дальнейшего существенно то, что, как было отмечено при рассмотрении равенств (1.37) и (1.45), все собственные векторы матрицы A_0 являются также собственными векторами и матриц $A_{k_s+l_s}$ $(s = 1,..., m)$ в первом случае или матриц (1.45) во втором случае.

Матрица *A* принадлежит к тому или иному из указанных типов матриц в зависимости от того, чему равен ее след $SpA = \overline{\alpha}\overline{\beta}$. При этом

$$A^2 = (\alpha_1 \beta^1 + \ldots + \alpha_n \beta^n) A = \overline{\alpha}\overline{\beta} A,$$

откуда следует, что матрица *A* идемпотентна, как и матрицы (1.45) (и матрицы $A_{k_s+l_s}$ при $l_s = 1$), в случае $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 1$, и нильпотентна, как и матрицы $A_{k_s+l_s}$ при $l_s > 1$, в случае $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 0$. Поэтому, как сказано выше, все собственные векторы матрицы A_0 являются одновременно и собственными векторами матрицы *A*. Это позволяет свести задачу нахождения собственных векторов матрицы A_0 к нахождению тех собственных векторов матрицы *A*, которые являются одновременно и собственными векторами матрицы A_0. Во многих случаях эта задача решается достаточно просто даже при высоких порядках рассматриваемых матриц.

Собственные векторы матрицы *A* находятся очень просто. Ее характеристическое уравнение

$$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n = 0$$

превращается в уравнение

$$\lambda^n - \overline{\alpha}\overline{\beta}\lambda^{n-1} = 0,$$

так как в силу известных выражений коэффициентов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ через диагональные миноры матрицы [19] и свойств матрицы *A* имеем $p_1 = \overline{\alpha}\overline{\beta}, p_2 = \ldots = p_n = 0$. При $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 1$ указанное уравнение имеет один ненулевой корень $\lambda_1 = 1$ и нулевой корень $\lambda_2 = 0$ кратности *n–1*. При $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 0$ указанное уравнение имеет только корень $\lambda = 0$ кратности *n*.

Система однородных линейных уравнений, служащая для нахождения координат $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ собственных векторов матрицы *A*, имеет вид

$$\begin{cases} (\alpha_1\beta^1 - \lambda)\zeta^1 + \alpha_2\beta^1\zeta^2 + \ldots + \alpha_n\beta^1\zeta^n = 0, \\ \alpha_1\beta^2\zeta^1 + (\alpha_2\beta^2 - \lambda)\zeta^2 + \ldots + \alpha_n\beta^2\zeta^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\beta^n\zeta^1 + \alpha_2\beta^n\zeta^2 + \ldots + (\alpha_n\beta^n - \lambda)\zeta^n = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться, что при $\lambda = 1$ этой системе удовлетворяют координаты вектора $\overline{\beta}$, что и должно быть согласно способу образования матрицы *A*. При $\lambda = 0$ указанная система сводится к одному уравнению

$$\alpha_1\zeta^1 + \alpha_2\zeta^2 + \ldots + \alpha_n\zeta^n = 0, \tag{4.3}$$

из которого можно найти одну неизвестную координату, остальные задавая произвольно с таким расчетом, чтобы получаемые векторы были линейно независимы. Например, произвольный собственный вектор матрицы *A*, соответствующий собственному числу $\lambda = 0$, при $\alpha_n \neq 0$ представляется в виде

$$\overline{\zeta} = (\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^n, \alpha_1'\zeta^1 + \ldots + \alpha_{n-1}'\zeta^{n-1}) \ \ (\alpha_i' = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \alpha_n \neq 0, i = 1, \ldots, n-1),$$

где координаты $\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ произвольны. Этот вектор окажется собственным вектором матрицы A_0 в том случае, если координаты $\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ будут выбраны таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$A_0 \overline{\zeta} = \lambda \overline{\zeta}, \tag{4.4}$$

где λ – одно из собственных чисел матрицы A_0, также подлежащее определению.

Последнее равенство эквивалентно системе n уравнений, линейных относительно координат $\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$, с коэффициентами, зависящими от λ. Задача состоит в нахождении значений λ, при которых эта система совместна, и последующем определении координат $\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$. Одно решение этой системы дает вектор $\overline{\beta}$, так как по условию $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 0$.

Заметим, что равенство (4.3) можно использовать для нахождения собственных векторов матрицы A_0 и в том случае, когда известен только собственный вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ матрицы A_0^T.

Кроме того, указанные матрицы часто удается найти при помощи системы уравнений (3.5).

5. Полученные в пунктах 1, 2 результаты позволяют указать чисто алгебраический метод нахождения общих интегралов однородных линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами.

Рассматривая совокупность попарно перестановочных линейно независимых операторов $X_0 f, X_1 f, \ldots, X_{n-1} f$, можно утверждать, что уравнение $X_0 f = 0$ допускает абелеву группу G_{n-1} с операторами $X_1 f, \ldots, X_{n-1} f$. Так как абелевы группы всегда разрешимы, то, согласно известной теореме о разрешимых группах [20], интегрирование уравнения $X_0 f = 0$ (а следовательно, и соответствующей ему системы (1.1)) сводится к квадратурам. Более того, в нашем случае абелевой однородной линейной группы удается полностью проинтегрировать все уравнения $X_k f = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ (а потому и все соответствующие им линейные однородные дифференциальные системы с постоянными коэффициентами), и также получить конечные уравнения группы G_n, порожденной операторами $X_0 f, X_1 f, \ldots, X_{n-1} f$.

Действительно, так как оператор $X_0 f$ перестановочен со всеми операторами $X_1 f, \ldots, X_{n-1} f$, можно утверждать, что уравнения

$$X_1 f = 0, \ldots, X_{n-1} f = 0, \tag{5.1}$$

образующие полную систему, допускают оператор $X_0 f$. Следовательно, если $u(x^1,\dots,x^n)$ – отличное от постоянной решение этой системы, то $X_0 u$ – также решение этой системы, причем $X_0 u$ не может быть тождественным нулю, так как в противном случае система уравнений $X_0 f = 0, X_1 f = 0, \dots, X_{n-1} f = 0$ была бы зависимой. Поскольку система (5.1) может иметь только одно независимое решение, то должно быть $X_0 u = \varphi(u)$, и если положить $u^0 = \int \frac{du}{\varphi(u)}$, то u^0 будет решением системы (5.1) и уравнения $X_0 f = 1$, то есть тождественно будут выполняться равенства

$$
\begin{aligned}
X_0 u^0 &\equiv \xi_0^1 \frac{\partial u^0}{\partial x^1} + \dots + \xi_0^n \frac{\partial u^0}{\partial x^n} = 1,\\
X_1 u^0 &\equiv \xi_1^1 \frac{\partial u^0}{\partial x^1} + \dots + \xi_1^n \frac{\partial u^0}{\partial x^n} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
X_{n-1} u^0 &\equiv \xi_{n-1}^1 \frac{\partial u^0}{\partial x^1} + \dots + \xi_{n-1}^n \frac{\partial u^0}{\partial x^n} = 0.
\end{aligned}
$$

Теперь воспользуемся тем, что в системе попарно перестановочных операторов $X_0 f, X_1 f, \dots, X_{n-1} f$ все операторы совершенно равноправны и приведенные рассуждения можно повторить, выбрав вместо оператора $X_0 f$ любой другой оператор из указанной системы операторов. Отсюда следует, что существует совокупность отличных от тождественных постоянных функций $u^0, u^1, \dots, u^{n-1}$, обращающих в тождества следующие равенства:

$$
\begin{array}{llll}
(0) & X_0 u^0 = 1, & X_1 u^0 = 0, \ \dots, & X_{n-1} u^0 = 0,\\
(1) & X_0 u^1 = 0, & X_1 u^1 = 1, \ \dots, & X_{n-1} u^1 = 0,\\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
(n-1) & X_0 u^{n-1} = 0, & X_1 u^{n-1} = 0, \ \dots, & X_{n-1} u^{n-1} = 1.
\end{array}
\tag{5.2}
$$

Каждую из этих систем можно рассматривать как систему уравнений относительно частных производных соответствующей функции по переменным $x^1, x^2, \dots, x^n$. Все они имеют одну и ту же матрицу, а именно введенную нами в рассмотрение в пункте 2 определяющую матрицу

$$
\mathrm{M} = (\xi_j^i) \quad (i = 1, \dots, n;\ j = 0, 1, \dots, n-1). \tag{5.3}
$$

это позволяет объединить равенства (5.2) в одно матричное равенство

$$(\xi_j^i)\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right) = E\,. \tag{5.4}$$

Так как операторы $X_0 f, X_1 f, \ldots, X_{n-1} f$ линейно независимы, то ранг матрицы (5.3) для общих значений $x^1, x^2, \ldots, x^n$ равен n, а потому ее определитель (определяющая функция)

$$M = |\mathrm{M}| = \left|\xi_j^i\right| \neq 0$$

для указанных значений $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Тогда из равенства (5.4) получаем равенство

$$\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right) = \mathrm{M}^{-1} = \left(\frac{A_i^k}{M}\right),$$

умножив обе части которого слева на вектор $d\bar{x} = (dx^1, \ldots, dx^n)$, приходим к равенствам

$$du^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^k dx^i}{M} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,. \tag{5.5}$$

Интегрируя полученные полные дифференциалы в пределах от $P_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ до $P(x^1, \ldots, x^n)$ $(M(P_0) \neq 0,\ M(P) \neq 0)$, находим решения

$$u^k(P) = \int_{P_0}^{P} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} A_i^k dx^i + u^k(P_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{5.6}$$

соответственно систем (0), (1), …, (n–1) в (5.2).

Напомним, что для всякой однопараметрической (с параметром τ) непрерывной группы G изменение произвольной дифференцируемой функции f при бесконечно малом сдвиге вдоль траектории группы характеризуется равенством

$$df = Xf d\tau\,,$$

где Xf – инфинитезимальный оператор группы G. В силу этого, равенства (5.2) можно переписать в виде

$$
\begin{array}{llll}
(0) & d_0u^0 = d\tau_0, & d_1u^0 = 0,\ \ldots, & d_{n-1}u^0 = 0,\\
(1) & d_0u^1 = 0, & d_1u^1 = d\tau_1,\ \ldots, & d_{n-1}u^1 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots & & & \\
(n-1) & d_0u^{n-1} = 1, & d_1u^{n-1} = 0,\ \ldots, & d_{n-1}u^{n-1} = d\tau_{n-1},
\end{array}
$$

где нижний индекс указывает однопараметрическую группу, вдоль траекторий которой рассматривается указанное изменение соответствующей функции. Интегрируя эти равенства, получаем равенства

$$
\begin{array}{llll}
(0) & u^0 = \tau_0 + C_0^0, & u^0 = C_1^0,\ \ldots, & u^0 = C_{n-1}^0,\\
(1) & u^1 = C_0^1, & u^1 = \tau_1 C_1^1,\ \ldots, & u^1 = C_{n-1}^1,\\
\ldots\ldots\ldots & & & \\
(n-1) & u^{n-1} = C_0^{n-1}, & u^{n-1} = C_1^{n-1},\ \ldots, & u^{n-1} = \tau_{n-1} + C_{n-1}^{n-1},
\end{array}
\tag{5.7}
$$

где функции u^k $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ определяются равенством (5.6).

В совокупности равенств (5.7) левые части всех равенств *k*-го столбца, кроме левой части *k*-го равенства, образуют полный набор независимых решений уравнения $X_k f = 0$. Сами эти равенства образуют полный набор независимых первых интегралов соответствующей указанному уравнению однородной линейной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами. Вместе с *k*-м равенством они позволяют выразить координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ через соответствующие произвольные постоянные и групповой параметр τ_k, то есть записать общее решение указанной системы уравнений, определяющее в фазовом пространстве $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ траектории однопараметрической (с параметром τ_k) группы, порождаемой оператором $X_k f$.

В частности, равенства $u^1 = C_0^1, \ldots, u^{n-1} = C_0^{n-1}$ образуют полный набор независимых первых интегралов системы (1.1), которые вместе с равенством $u^0 = \tau_0 + C_0^0$ позволяют выразить координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ через произвольные постоянные C_0^0, $C_0^1, \ldots, C_0^{n-1}$ и параметр $\tau_0 = t$, то есть записать общее решение системы (1.1), определяющее в фазовом пространстве $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ траектории однопараметрической (с параметром *t*) группы, порождаемой оператором $X_0 f$.

Наконец, равенства

$$u^0 = \tau_0 + C_0^0,\ u^1 = \tau_1 + C_0^1, \ldots,\ u^{n-1} = \tau_{n-1} + C_0^{n-1}$$

позволяют выразить координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ через все указанные параметры и произвольные постоянные, то есть записать конечные уравнения абелевой группы G_n, порождаемой попарно перестановочными операторами $X_0 f, X_1 f, \ldots, X_{n-1} f$.

Далее сосредоточим внимание только на задаче интегрирования системы (1.1). Исходя из изложенного, схему решения этой задачи можно описать следующим образом: 1) для матрицы A_0 заданной системы каким-либо образом находится совокупность перестановочных между собой и с самой матрицей A_0 матриц $A_1, \ldots, A_{n-1}$; 2) по найденным матрицам составляется определяющая матрица M, ее определитель $|\mathrm{M}| = M$ и обратная матрица M^{-1}; 3) находятся полные дифференциалы (5.5), интегрирование которых дает искомые функции (5.6).

Непосредственное применение этой схемы к конкретным системам может привести к громоздким вычислениям даже в случаях систем невысоких порядков. Вычисления значительно упрощаются, если для матрицы A_0^T каким-либо образом найден жорданов базис $\overline{\alpha}^{k_s+\nu}$ $(s = 1, \ldots, m,\ \nu = 1, \ldots, l_s)$.

Действительно, если указанный жорданов базис известен, то, согласно изложенному в пункте 1, можно построить каноническую систему операторов (1.29), определяющая матрица для которой имеет вид (2.4) с клетками (2.5) и определителем (2.7). Обращая матрицу M, получим также клеточно-диагональную матрицу

$$\widetilde{\mathrm{M}}^{-1} = diag(\widetilde{\mathrm{M}}_1^{-1}, \widetilde{\mathrm{M}}_2^{-1}, \ldots, \widetilde{\mathrm{M}}_m^{-1})$$

с клетками линейного верхнетреугольного вида

$$\widetilde{\mathrm{M}}_s^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{k_s+1} & \Delta_{k_s+2} & \ldots & \Delta_{k_s+l_s} \\ 0 & \Delta_{k_s+1} & \ldots & \Delta_{k_s+l_s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta_{k_s+1} \end{pmatrix},$$

такими, что

$$\widetilde{\mathrm{M}}_s \widetilde{\mathrm{M}}_s^{-1} = \begin{pmatrix} z^{k_s+1} & z^{k_s+2} & \ldots & z^{k_s+l_s} \\ 0 & z^{k_s+1} & \ldots & z^{k_s+l_s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & z^{k_s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{k_s+1} & \Delta_{k_s+2} & \ldots & \Delta_{k_s+l_s} \\ 0 & \Delta_{k_s+1} & \ldots & \Delta_{k_s+l_s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta_{k_s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь этим равенством, получим равенства

$$\begin{aligned}
&z^{k_s+1}\Delta_{k_s+1} = 1,\\
&z^{k_s+1}\Delta_{k_s+2} + z^{k_s+2}\Delta_{k_s+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z^{k_s+1}\Delta_{k_s+l_s} + z^{k_s+2}\Delta_{k_s+l_s-1} + \ldots + z^{k_s+l_s}\Delta_{k_s+1} = 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

из которых последовательно находим

$$\begin{aligned}
&\Delta_{k_s+1} = \frac{1}{z^{k_s+1}} \qquad (z^{k_s+1} \neq 0),\\
&\Delta_{k_s+2} = -\frac{z^{k_s+2}}{z^{k_s+1}}\Delta_{k_s+1},\\
&\Delta_{k_s+3} = -\frac{1}{z^{k_s+1}}(z^{k_s+2}\Delta_{k_s+2} + z^{k_s+3}\Delta_{k_s+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta_{k_s+l_s} = -\frac{1}{z^{k_s+1}}(z^{k_s+2}\Delta_{k_s+l_s-1} + \ldots + z^{k_s+l_s}\Delta_{k_s+1}),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

где правую часть каждого равенства следует выразить только через коэффициенты z при помощи всех предыдущих равенств. Тогда полные дифференциалы (5.5) функций $u^{k_s+\nu}$ представляются в виде

$$du^{k_s+\nu} = \Delta_{k_s+\nu}dz^{k_s+1} + \Delta_{k_s+\nu-1}dz^{k_s+2} + \ldots + \Delta_{k_s+1}dz^{k_s+\nu},$$

а сами функции можно определить равенствами

$$\begin{aligned}
u^{k_s+\nu} = &\int_{z_0^{k_s+1}}^{z^{k_s+1}} \Delta_{k_s+\nu}(z^{k_s+1}, z^{k_s+2}, \ldots, z^{k_s+\nu})dz^{k_s+1} + \int_{z_0^{k_s+2}}^{z^{k_s+\nu}} \Delta_{k_s+\nu-1}(z_0^{k_s+1}, z^{k_s+2}, \ldots, z^{k_s+\nu})dz^{k_s+2} + \ldots\\
&+ \int_{z_0^{k_s+\nu}}^{z^{k_s+1}} \Delta_{k_s+1}(z_0^{k_s+1}, z_0^{k_s+2}, \ldots, z^{k_s+\nu})dz^{k_s+\nu} + C^{k_s+\nu},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

где интегрирования следует выполнять в обратном порядке, начиная с последнего.

Пользуясь равенствами (5.9), легко убедиться, что каждый элемент $\Delta_{k_s+\nu}$ представляется в виде некоторого полинома от $(z^{k_s+1})^{-1}, z^{k_s+2}, \ldots, z^{k_s+l_s}$, причем каждое слагаемое этого полинома обязательно содержит множитель $\left[(z^{k_s+1})^{-1}\right]^{\alpha}$, где $\alpha > 0$. Отсюда следует, что результаты всех интегрирований в правой части равенства (5.10), начиная со второго, будут содержать слагаемые только двух типов: слагаемые смешанного типа, то есть слагаемые, выражения которых содержат как координаты с индексом «0», так и координаты без этого индекса, и слагаемые, выражения которых содержат только координаты с индексом «0».

Согласно известным свойствам полных дифференциалов, выражение, полученное после выполнения всех интегрирований в правой части равенства (5.10), не может содержать слагаемых смешанного типа. Поэтому все слагаемые смешанного типа, полученные в результате первого и всех последующих интегрирований, взаимно уничтожатся и останутся только слагаемые, выражения которых содержат либо только координаты без индекса «0», либо только координаты с этим индексом. Совокупность всех слагаемых первого типа и дает нам аналитические выражения искомых функций $u^{k_s+\nu}$, которые мы, таким образом, можем получить, если формально проинтегрируем выражения для $\Delta_{k_s+\nu}$ по z^{k_s+1}, считая остальные координаты постоянными:

$$u^{k_s+\nu} = \int \Delta_{k_s+\nu}(z^{k_s+1}, z^{k_s+2}, \ldots, z^{k_s+\nu})dz^{k_s+1} + C^{k_s+\nu} \quad . \tag{5.11}$$

Зная функции $u^{k_s+\nu}$ $(s = 1,\ldots, m,\ \nu = 1,\ldots, l_s)$ и разложение (1.11) оператора $\widetilde{X}_0\widetilde{f}$ по каноническому базису, легко найти полный набор линейно независимых решений уравнения $\widetilde{X}_0\widetilde{f} = 0$. Действительно, так как оператор $\widetilde{X}_0\widetilde{f}$ является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами канонических операторов, то решения уравнения $\widetilde{X}_0\widetilde{f} = 0$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами функций $u^1, u^2, \ldots, u^n$:

$$\widetilde{u} = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_n u^n .$$

Подставляя это выражение для $\widetilde{u}$ в (1.11) и требуя, чтобы тождественно выполнялось равенство $\widetilde{X}_0\widetilde{u} = 0$, получаем равенство

$$\sum_{s=1}^{m}\left[\lambda_s X_{k_s+1}(\alpha_1 u^1 + \ldots + \alpha_n u^n) + X_{k_s+2}(\alpha_1 u^1 + \ldots + \alpha_n u^n)\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{m}\left[\lambda_s(\alpha_1 X_{k_s+1}u^1 + \ldots + \alpha_n X_{k_s+1}u^n) + \alpha_1 X_{k_s+2}u^1 + \ldots + \alpha_n X_{k_s+2}u^n\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{m}(\lambda_s \alpha_{k_s+1} + \alpha_{k_s+2}) = 0,$$

так как $X_{k_s+1}u^j = \delta^j_{k_s+1}$, $X_{k_s+2}u^j = \delta^j_{k_s+2}$, где $\delta^j_{k_s+1}$, $\delta^j_{k_s+2}$ – символы Кронекера. Данное равенство, рассматриваемое как уравнение относительно n неизвестных коэффициентов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, имеет ровно n – 1 независимых решений, определяющих столько же независимых решений уравнения $\widetilde{X}_0\widetilde{f} = 0$. После перехода к прежним переменным эти решения дадут все линейно независимые решения уравнения $X_0 f = 0$. Приравнивая эти решения к произвольным постоянным, получим n – 1 независимых первых интегралов системы (1.1), не зависящих от переменной t. В качестве равенства, вводящего в рассмотрение эту переменную, можно взять любое решение уравнения $X_0 f = 1$.

Согласно теореме 2.1 каждой абелевой однородной линейной группе G_n соответствует вполне определенная (с точностью до расположения клеток) каноническая определяющая матрица M. Это позволяет классифицировать все абелевы линейные однородные группы одного и того же порядка по типам соответствующих им канонических матриц. Каждый из этих типов полностью определяется структурой разбиения на цепочки векторов жорданова базиса $\overline{\alpha}^{k_s+\nu}$ $(s = 1,\ldots,m,\ \nu = 1,\ldots,l_s)$, которая может быть описана при помощи числа $m = 1,\ldots,n$ и чисел $l_1,l_2,\ldots,l_m$, удовлетворяющих условию $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = n$.

Например, при n = 2 имеем два типа канонических матриц

$$1)\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad 2)\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix},$$

$$(m = 2,\ l_1 = l_2 = 1) \quad (m = 1,\ l_1 = 2)$$

а при n = 3 возможны канонические матрицы четырех типов:

$$1)\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix},\ 3)\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & z_3 \\ 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix},\ 4)\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}.$$

$$(m = 3,\ l_1 = l_2 = l_3 = 1)\ (m = 2,\ l_1 = 2,\ l_2 = 1)\ (m = 2,\ l_1 = 1,\ l_2 = 2)\ (m = 1,\ l_1 = 3)$$

Для каждой канонической матрицы элементы обратной матрицы выписываются по формулам (5.9). Согласно вышеизложенному, если каждую клетку найденной обратной матрицы формально проинтегрировать по первой координате соответствующей клетки данной канонической матрицы, то получим матрицу, элементами которой будут функции (5.11)

$$\widetilde{U} = diag(\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m)\,, \tag{5.12}$$

где

$$\widetilde{U}_s = \begin{pmatrix} u^{k_s+1} & u^{k_s+2} & \ldots & u^{k_s+l_s} \\ 0 & u^{k_s+1} & \ldots & u^{k_s+l_s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u^{k_s+1} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Действуя на эту матрицу оператором $\widetilde{X}_0\widetilde{f}$, получаем, как и следовало ожидать, жорданову форму матрицы A_0: $X_0\widetilde{U} = \widetilde{A}_0$.

Важно подчеркнуть, что элементы всех клеток (5.13) вычисляются по одним и тем же формулам (5.11) независимо от того, какое значение имеет индекс k_s. Это позволяет в формулах (5.9) и (5.11) индекс k_s опустить и, рассматривая некоторую произвольную матрицу

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & \ldots & z^l \\ 0 & z^1 & \ldots & z^{l-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & z^1 \end{pmatrix},$$

вычислить элементы матрицы

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \ldots & u^l \\ 0 & u^1 & \ldots & u^{l-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u^1 \end{pmatrix}$$

по формулам

$$u^\nu = \int \Delta_\nu (z^1, z^2, \ldots, z^\nu) dz^1\,, \tag{5.14}$$

где Δ_ν последовательно вычисляются по формулам (5.9), в которых, как сказано выше, опущен индекс k_s.

Укажем несколько последовательных значений Δ_ν и соответствующих им функций u^ν:

$$\Delta_1 = \frac{1}{z^1}, \qquad u^1 = \ln z^1,$$

$$\Delta_2 = -\frac{z^2}{(z^1)^2}, \qquad u^2 = \frac{z^2}{z^1},$$

$$\Delta_3 = \frac{(z^2)^2}{(z^1)^3} - \frac{z^3}{(z^1)^2}, \qquad u^3 = -\frac{(z^2)^2}{(z^1)^2} + \frac{z^3}{z^1},$$

$$\Delta_4 = -\frac{(z^2)^3}{(z^1)^4} + 2\frac{z^2 z^3}{(z^1)^3} - \frac{z^4}{(z^1)^2}, \qquad u^4 = \frac{(z^2)^3}{3(z^1)^3} - \frac{z^2 z^3}{(z^1)^2} + \frac{z^4}{z^1},$$

....

Указанные выражения для u^1, u^2, u^3, u^4 полностью решают задачу нахождения всей совокупности линейно независимых интегралов любой системы типа (1.1) вплоть до четвертого порядка.

Рассмотрим для примера второй тип канонической матрицы третьего порядка

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеем три функции: функции

$$u^1 = \ln z^1 \text{ и } u^2 = \frac{z^2}{z^1},$$

соответствующие первой клетке матрицы $\widetilde{M}$ порядка $l_1 = 2$, и функцию

$$u^3 = \ln z^3,$$

соответствующую второй клетке порядка $l_2 = 1$. Так как

$$\widetilde{X}_0 \widetilde{f} = \lambda_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{f} + \widetilde{X}_2 \widetilde{f} + \lambda_2 \widetilde{X}_3 \widetilde{f},$$

то, положив

$$\widetilde{u} = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3,$$

получаем

$$\widetilde{X}_0\widetilde{u} = \lambda_1\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_2\alpha_3 .$$

Мы будем иметь $\widetilde{X}_0\widetilde{u} \equiv 0$, если α_1, α_2 и α_3 будут линейно независимыми решениями уравнения

$$\lambda_1\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_2\alpha_3 = 0 .$$

Принимая в качестве свободных параметров α_1, α_3 и придавая им последовательно значения $\alpha_1^1 = 1$, $\alpha_3^1 = 0$ и $\alpha_1^2 = 0$, $\alpha_3^2 = 1$, находим соответствующие значения $\alpha_2^1 = -\lambda_1$ и $\alpha_2^2 = -\lambda_2$. В результате получаем два линейно независимых решения

$$\widetilde{u}^1 = u^1 - \lambda_1 u^2 \quad \text{и} \quad \widetilde{u}^2 = -\lambda_2 u^2 + u^3$$

уравнения $\widetilde{X}_0\widetilde{f} = 0$. Приравнивая их к произвольным постоянным, приходим к двум линейно независимым первым интегралам, не содержащим явно переменной *t* канонической системы однородных линейных уравнений

$$\dot{z}^1 = \lambda_1 z^1,\ \dot{z}^2 = z^1 + \lambda_1 z^2,\ \dot{z}^3 = \lambda_2 z^3,$$

соответствующей уравнению $\widetilde{X}_0\widetilde{f} = 0$ (см. уравнения (1.10)).

Решением уравнения $\widetilde{X}_0\widetilde{f} = 1$ является, например, функция $\widetilde{u}^0 = \dfrac{u^1}{\lambda_1}$, что дает равенство

$$u^1 = \lambda_1 t + C^0,$$

вводящее в рассмотрение переменную *t*.

Равенства

$$\ln z^1 = \lambda_1 t + C^0,\ \ln z^1 - \lambda_1 \frac{z^2}{z^1} = C^1,\ -\lambda_2 \frac{z^2}{z^1} + \ln z^3 = C^2$$

определяют общий интеграл указанной канонической системы уравнений, разрешая которое относительно z^1, z^2, z^3, получаем равенства

$$z^1 = C^1 e^{\lambda_1 t},\ z^2 = (C^1 t + \widetilde{C}^2)e^{\lambda_1 t},\ z^3 = \widetilde{C}^3 e^{\lambda_2 t},$$

определяющие общее решение этой системы.

Если транспонирование данной матрицы A_0 дает матрицу A_0^T, имеющую соответствующий рассмотренному случаю жорданов базис $\overline{\alpha}^1, \overline{\alpha}^2, \overline{\alpha}^3$ с соответствующими ему собственными числами λ_1 и λ_2, то, подставляя в последние равенства выражения $z^1 = \overline{\alpha}^1 \overline{x}$, $z^2 = \overline{\alpha}^2 \overline{x}$ и $z^3 = \overline{\alpha}^3 \overline{x}$, получим равенства, разрешая которые относительно x^1, x^2, x^3, найдем общее решение линейной системы с матрицей A_0.

---

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М. : Наука, 1969. 367 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. : ГИФМЛ, 1958. 468 с.
3. Там же.
4. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М. : ГИИЛ, 1947. 359 с.
5. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М. : ГИИЛ, 1961. 387 с.
6. Gröbner W. Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Berlin : Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967. 176 c.
7. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М. : Наука, 1970. 400 с.
8. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований.
9. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М. : Наука, 1974. 296 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 575 с.
12. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. М. : Просвещение, 1978. 447 с.
13. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц ; Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
15. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.
17. Там же.
18. Там же.
19. Данилина Н.И. [и др.]. Численные методы. М. : Высшая школа, 1976. 368 с.
20. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1940. 396 с. ; Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман, Р. Введение в теорию матриц. – М. : Наука, 1969. – 367 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
3. Данилина Н.И. [и др.]. Численные методы. – М. : Высшая школа, 1976. – 368 с.
4. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1974. – 296 с.
5. Лефшец, С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М. : ГИИЛ, 1961. – 387 с.
6. Ляпин, Е.С. Алгебра и теория чисел / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. – М. : Просвещение, 1978. – 447 с.

7. Мальцев, А.И. Основы линейной алгебры. – М. : Наука, 1970. – 400 с.
8. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 468 с.
9. Чеботарев, Н.Г. Теория групп Ли. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1940. – 396 с.
10. Эйзенхарт, Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М. : ГИИЛ, 1947. – 359 с.
11. Gröbner W. Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. – Berlin : Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967. – 176 с.

С.С. Мамонов

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматриваются матричные уравнения, для которых находятся условия их разрешимости. Вопросы, связанные с матричными уравнениями изложены в прилагаемом списке литературы [1].

матричные уравнения, прямое произведение, положительно определенные решения матричных уравнений

Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова

$$AX + XA^{*} = C, \tag{1}$$

где $A, C \in C^{n\times n}$, «$*$» – эрмитово сопряжение, X – неизвестная матрица. Для матричного уравнения Ляпунова (1) известны условия существования решения X, получены представления решения X в виде экспоненциальной функции [2] и в виде ряда.

<u>Определение 1.</u> Пусть заданы матрицы $A_{n,m} \in M^{n\times m}$, $B_{p,q} \in M^{p\times q}$, где $A_{n,m} = (a_{i,j})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Кронекерово произведение матриц $A_{n,m}, B_{p,q}$ есть матрица $C_{np,mq} = A_{n,m} \otimes B_{p,q}$, имеющая структуру

$$A_{n,m} \otimes B_{p,q} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

Для произвольной матрицы $A_{n,m} \in M^{n\times m}$ образуем вектор $\left[A_{n,m}\right]^T =$ $=\left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nm}\right)$, при этом матрица A^T является матрицей транспонированной для матрицы A.

Определение 2. Пусть $A, B \in M^{n\times m}$, $A_{n,m} = (a_{i,j})$, $B_{n,m} = (b_{i,j})$, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$, под Адамаровым произведением матриц A и B будем понимать матрицу $C = A \circ B = \left(a_{ij} b_{ij}\right),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$.

Пусть $A_{n\times m}$, $B_{m\times k}$ – произвольные матрицы, для которых определено произведение, I_n – единичная матрица, тогда справедливы соотношения:

$$\left[A_{n\times m} B_{m\times k} C_{k\times p}\right] = \left(AB \otimes I_p\right)[C] = \left(A \otimes C^T\right)[B], \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A_{n\times m} B_{m\times k} C_{k\times p} &= \left(I_n \otimes [B]^T \left(A^T \otimes C\right)\right)\left([I_n] \otimes I_p\right) = \\ &= \left(I_n \otimes \left[I_p\right]^T\right)\left(\left(A \otimes C^T\right)[B] \otimes I_p\right). \end{aligned} \tag{3}$$

В монографии [4] уравнение (1) сводится к уравнению

$$\left(A \otimes I + I \otimes \overline{A}\right)[X] = [C], \tag{4}$$

где «$\otimes$» – прямое произведение матриц, I – единичная матрица, $\overline{A}$ – матрица, сопряженная для матрицы A, $[C]$ – вектор-столбец матрицы C. В работе с использованием соотношения (4) получены условия разрешимости уравнения (1) в случае матрицы общего вида, приведено решение X уравнения (1).

Теорема 1. Пусть матрица A имеет собственные значения, такие, что $\lambda_i(A) + \lambda_j\left(\overline{A}\right) \neq 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $\overline{A}$ – матрица, сопряженная для матрицы A, тогда решение уравнения (1) имеет вид

$$X = \left(I \otimes [I]^T\left(I \otimes (I \otimes C)\left(A^T \otimes I + I \otimes A^*\right)^{-1}\right)\right)\left([I] \otimes I\right). \tag{5}$$

Если $\det\left(A \otimes I + I \otimes \overline{A}\right) = 0$, $Q = A \otimes I + I \otimes \overline{A}$, Q^+ – обобщенно обратная матрица [3] для матрицы Q, $QQ^+[C] = [C]$, то решение уравнения (1) имеет вид

$$X = \left(I \otimes \left(Q^+[C] + Y - Q^+QY\right)^T\right)\left([I] \otimes I\right), \tag{6}$$

где Y – произвольный вектор.

<u>Доказательство</u>. Используя соотношения (2), уравнение (1) запишем в виде

$$(A\otimes I)[X]+(I\otimes\overline{A})[X]=[C], \tag{7}$$

уравнение (7) равносильно уравнению

$$(A\otimes I+I\otimes\overline{A})[X]=[C]. \tag{8}$$

В силу условий теоремы 1, для матрицы A выполняются неравенства $\lambda_i(A)+\lambda_j(\overline{A})\neq 0$, $i,j=\overline{1,n}$, $\det(A\otimes I+I\otimes\overline{A})\neq 0$, следовательно, уравнение (8) имеет единственное решение. Пусть $H^T=(A\otimes I+I\otimes\overline{A})^{-1}$, тогда $[X]=H^T[C]$. Используя (3), найдем решение

$$X=\left(I\otimes[X]^T\right)([I]\otimes I)=\left(I\otimes\left(H^T[C]\right)^T\right)([I]\otimes I)=\left(I\otimes\left([C]^T H\right)\right)([I]\otimes I)=\left(I\otimes[C]^T\right)(I\otimes H)([I]\otimes I)=\left(I\otimes\left([I]^T(I\otimes C)\right)\right)(I\otimes H)([I]\otimes I)=\left(I^2\otimes\left([I]^T(I\otimes C)\right)\right)(I\otimes H)([I]\otimes I)=\left(I\otimes[I]^T\right)(I\otimes I\otimes C)(I\otimes H)([I]\otimes I)=\left(I\otimes[I]^T\right)(I\otimes(I\otimes C)H)\left(I\otimes[I]^T\right)=\left(I\otimes[I]^T\right)\left(I\otimes(I\otimes C)\left(A^T\otimes I+I\otimes A^*\right)^{-1}\right)\times\left(I\otimes[I]^T\right). \tag{9}$$

Если $\det(A\otimes I+I\otimes\overline{A})=0$, $Q=A\otimes I+I\otimes\overline{A}$, Q^+ – обобщенно обратная матрица для матрицы Q, $QQ^+[C]=[C]$, то уравнение (8) имеет решение $[X]$ [4]

$$[X]=Q^+[C]+Y-Q^+QY, \tag{10}$$

где Y – произвольный вектор. Применяя (3) к соотношению (10), найдем матрицу $X=\left(I\otimes\left(Q^+[C]+Y-Q^+QY\right)^T\right)([I]\otimes I)$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим совокупность уравнений

$$AX+XA^*=C,\quad Xq=r, \tag{11}$$

где $A, C \in C^{n\times n}$, $q, r \in C^n$, X – неизвестная матрица. Для случая $C \le 0$, необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (1), (11) определяются частотной теоремой Якубовича-Калмана [5].

Теорема 2. Пусть матрица $A = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $\mathrm{Re}(\alpha_i + \alpha_j) \ne 0$, $i, j = \overline{1, n}$, $e_i = colon\left(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots 0\right)$, $E_i = e_i \otimes e_i^T$, $B_i = \left(\alpha_i I + \overline{A}\right)^{-1} = diag(b_{i1}, b_{i2}, \ldots b_{in})$, $i = \overline{1, n}$, $Q = E_1 \otimes (B_1 q)^T + E_2 \otimes (B_2 q)^T + \ldots + E_n \otimes (B_n q)^T$, Q^+ – обобщенно обратная матрица для матрицы Q, тогда для того чтобы уравнения (1), (11) имели решение X, необходимо и достаточно, чтобы $QQ^+ r = r$. Решение X имеет вид $X = C \circ B$, где $B = (b_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, $C = \left(I \otimes \left(Q^+ r + Y - Q^+ Q Y\right)^T \right)([I] \otimes I)$, Y – произвольный вектор. Если $C < 0$, $B < 0$, то $X > 0$.

Доказательство. Используя условие теоремы $A = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, найдем матрицу $H = \left(A^T \otimes I + I \otimes A^*\right)^{-1}$:

$$H = \left(A^T \otimes I + I \otimes A^*\right)^{-1} = e_1 \otimes e_1^T \otimes \left(\alpha_1 I + A^*\right)^{-1} + e_2 \otimes e_2^T \otimes \left(\alpha_2 I + A^*\right)^{-1} + \\ + \ldots + e_n \otimes e_n^T \otimes \left(\alpha_n I + A^*\right)^{-1} = E_1 \otimes B_1 + E_2 \otimes B_2 + \ldots + E_n \otimes B_n. \quad (12)$$

Соотношения (5), (12), (2), (3) позволяют найти решение уравнения (1)

$$X = \left(I \otimes [I]^T\right)\left(I \otimes (I \otimes C)(E_1 \otimes B_1 + E_2 \otimes B_2 + \ldots + E_n \otimes B_n)\right)([I] \otimes I) = (I \otimes \\ \otimes [I]^T)(I \otimes (E_1 \otimes CB_1))([I] \otimes I) + (I \otimes [I]^T)(I \otimes (E_2 \otimes CB_2))([I] \otimes I) + \ldots + (I \otimes \\ \otimes [I]^T)(I \otimes E_n \otimes CB_n)([I] \otimes I) = E_1^T CB_1 + E_2^T CB_2 + \ldots + E_n^T CB_n = C \circ B. \quad (13)$$

Подставим решение X в уравнение (11)

$$E_1^T CB_1 q + E_2^T CB_2 q + \ldots + E_n^T CB_n q = r. \quad (14)$$

Используя соотношение (3), получим, что уравнение (14) эквивалентно уравнению

$$\left(E_1^T \otimes (B_1 q)^T + E_2^T \otimes (B_2 q)^T + \ldots + E_n^T \otimes (B_n q)^T\right)[C] = r. \quad (15)$$

Для того чтобы уравнение (15) имело решение $[C]$, необходимо и достаточно, чтобы $QQ^{+}r = r$, $Q = E_1 \otimes (B_1 q)^T + E_2 \otimes (B_2 q)^T + \ldots + E_n \otimes (B_n q)^T$, Q^{+} – обобщенно обратная матрица для матрицы Q, при этом решение $[C]$ имеет вид [6]

$$[C] = Q^{+}r + Y - Q^{+}QY, \tag{16}$$

где Y – произвольный вектор. Применяя (2) к соотношению (16), найдем матрицу $C = \left(I \otimes \left(Q^{+}r + Y - Q^{+}QY \right)^T \right) ([I] \otimes I)$. Используя, теорему Шура [7] для решения $X = C \circ B$ получим, что если $C < 0$, $B < 0$, то $X > 0$. Теорема 2 доказана.

<u>Теорема 3.</u> Пусть $A^T = \alpha_0 I + J$, $\alpha_0 \in C$, $\alpha_0 \neq 0$, J – матрица, у которой верхняя наддиагональ состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю, I – единичная матрица, $\alpha = 2\operatorname{Re}\alpha_0$, $P = A^T + \overline{\alpha}_0 I$, тогда уравнение (1) имеет решение

$$X = CP^{-1} - J^T CP^{-2} + \cdots + (-1)^{n+1} \left(J^{n-1} \right)^T CP^{-n}. \tag{17}$$

<u>Доказательство.</u> Матрица A^T имеет вид $A^T = \alpha_0 I + J$, где $\alpha_0 \in C$, $\alpha_0 \neq 0$. Следовательно, $\lambda_i(A) + \lambda_j(\overline{A}) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$. В силу теоремы 1 уравнение (1) имеет единственное решение. Найдем матрицу $H = \left(A^T \otimes I + I \otimes A^T \right)^{-1}$. Из условий теоремы 3, $P = A^T + \overline{\alpha}_0 I = \alpha I + J$, $\alpha = 2\operatorname{Re}\alpha_0$, получим:

$$H = \left(A^T \otimes I + I \otimes A^* \right)^{-1} = \left((\alpha_0 I + J) \otimes I + I \otimes (\overline{\alpha}_0 I + J) \right)^{-1} = (\alpha_0 I \otimes I + J \otimes$$
$$\otimes I + \overline{\alpha}_0 I \otimes I + I \otimes J)^{-1} = \left(I \otimes (\alpha I + J) + J \otimes I \right)^{-1} = \left(I \otimes P + J \otimes I \right)^{-1}. \tag{18}$$

Из уравнения 18 следует, что $H^{-1} = I \otimes P + J \otimes I$. Покажем, что

$$H = I \otimes P^{-1} - J \otimes P^{-2} + J^2 \otimes P^{-3} + \cdots + (-1)^{n+1} J^{n-1} \otimes P^{-n}. \tag{19}$$

Действительно, так как $(J_n)^n = 0 \in M^{n \times n}$, то из (18), (19) вытекает

$$H^{-1}H = (I \otimes P + J \otimes I)H = (I \otimes P)\left(I \otimes P^{-1} \right) - (I \otimes P)\left(J \otimes P^{-2} \right) + (I \otimes$$

$$\otimes P)\left(J^2 \otimes P^{-3}\right)+\dots+(-1)^{n+1}(I \otimes P)\left(J^{n-1} \otimes P^{-n}\right) + (J \otimes I)\left(I \otimes P^{-1}\right) - $$
$$-(J \otimes I)\left(J \otimes P^{-2}\right)+\dots+(-1)^{n+1}(J \otimes I)\left(J^{(n-1)} \otimes P^{-n}\right)= I \otimes I - J \otimes P^{-1} + J^2 \otimes$$
$$\otimes P^{-2} +\dots+ (-1)^{n+1}\left(J^{n-1} \otimes P^{-n+1}\right) + J \otimes P^{-1} - J^2 \otimes P^{-2} +\dots+(-1)^{n+1}\left(J^n \otimes\right.$$
$$\left.\otimes P^{-n}\right) = I \otimes I = I .$$

Соотношения (9), (19), (3) позволяют найти решение уравнения (1).

$$X = \left(I \otimes [I]^T\right)(I \otimes I \otimes C)(I \otimes H)([I] \otimes I) = \left(I \otimes [I]^T\right)(I \otimes I \otimes C)(I \otimes I \otimes$$
$$\otimes P^{-1})([I] \otimes I) - \left(I \otimes [I]^T\right)(I \otimes I \otimes C)\left(I \otimes J \otimes P^{-2}\right)([I] \otimes I) + \dots + (-1)^{n+1} \times$$
$$\times\left(I \otimes [I]^T\right)(I \otimes I \otimes C)\left(I \otimes J^{n-1} \otimes P^{-n}\right)([I] \otimes I) = \left(I \otimes [I]^T\right)(I \otimes I \otimes$$
$$\otimes\left(CP^{-1}\right))([I] \otimes I) - \left(I \otimes [I]^T\right)\left(I \otimes J \otimes \left(CP^{-2}\right)\right)([I] \otimes I) + \dots + (-1)^{n+1}(I \otimes$$
$$\otimes [I]^T)\left(I \otimes J^{n-1} \otimes \left(CP^{-n}\right)\right)([I] \otimes I) = \left(I \otimes [I]^T\left(I \otimes \left(CP^{-1}\right)\right)\right)([I] \otimes I) -$$
$$- \left(I \otimes [I]^T\left(J \otimes \left(CP^{-2}\right)\right)\right)([I] \otimes I) + \dots + (-1)^{n+1}\left(I \otimes [I]^T\left(J^{n-1} \otimes\right.\right.$$
$$\left.\left.\otimes\left(CP^{-n}\right)\right)\right)([I] \otimes I) = CP^{-1} - J^T CP^{-2} + \dots + (-1)^{n+1}\left(J^{n-1}\right)^T CP^{-n}.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $A^T = \alpha_0 I + J$, $\alpha_0 \in C$, $\alpha_0 \neq 0$, J – матрица, у которой верхняя наддиагональ состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю, $\alpha = 2\operatorname{Re}\alpha_0$, $P = \alpha I + J$, $Q = I \otimes \left(P^{-1}q\right)^T - J^T \otimes \left(P^{-2}q\right)^T + \dots + (-1)^{n-1}\left(J^{n-1}\right)^T \otimes \left(P^{-n}q\right)^T$, Q^+ – обобщенно обратная матрица для матрицы Q, $QQ^+r = r$, $C = \left(I \otimes \left(Q^+r + Y - Q^+QY\right)^T\right)([I] \otimes I)$, Y – произвольный вектор. Тогда решение уравнений (1), (11) имеет вид

$$X = CP^{-1} - J^T CP^{-2} + \dots + (-1)^{n+1}\left(J^{n-1}\right)^T CP^{-n}.$$

Доказательство. В силу теоремы 3 решение уравнения (1) определяется соотношением (17). Подставим X в уравнение (11)

$$CP^{-1}q - J^T CP^{-2}q + \dots + (-1)^{n+1}\left(J^{n-1}\right)^T CP^{-n}q = r . \qquad (20)$$

Используя соотношение (3), получим уравнение (20), эквивалентное уравнению

$$\left(I \otimes \left(P^{-1}q\right)^T - J^T \otimes \left(P^{-2}q\right)^T + \ldots + (-1)^{n-1}\left(J^{n-1}\right)^T \otimes \left(P^{-n}q\right)^T \right)[C] = r\,. \quad (21)$$

Если $Q = I \otimes \left(P^{-1}q\right)^T - J^T \otimes \left(P^{-2}q\right)^T + \ldots + (-1)^{n-1}\left(J^{n-1}\right)^T \otimes \left(P^{-n}q\right)^T$, $r =\ QQ{+}r$, то в силу соотношения (20) вектор $[C]$ имеет вид

$$[C] = Q^+ r + Y - Q^+ QY\,, \quad (22)$$

где $Y-$произвольный вектор. Применяя (2) к соотношению (22), получим, что $C = \left(I \otimes \left(Q^+ r + Y - Q^+ QY\right)^T \right)([I] \otimes I)$. Теорема 4 доказана.

<u>Теорема 5.</u> [8]. Пусть $T^{-1}AT = B = \alpha I + J$, $\alpha \neq 0$, $f_k(\lambda) = \lambda^{-k} \in R$, $k \le n$, $k \in N$. Тогда $A^{-k} = TB^{-k}T^{-1}$, $B^{-k} = \left(b_{ij}^k\right)$, $i, j = \overline{1,n}$, $b_{1,j}^k = \dfrac{f_k^{(j-1)}(\alpha)}{(j-1)!}$, $j = \overline{1,n}$, $b_{ij}^k = b_{1,(j-(i-1))}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $b_{ij}^k = 0$, $i = \overline{1,n}$, $j < i$, $f_k^{(j-1)}$ – $(j-1)$ – производная функции f_k, $f_k^{(0)} = f_k$.

Рассмотрим матрицу $B_n = \alpha I_n + J_n$ и найдем вид коэффициентов матрицы $B^{-k} = \left(b_{ij}^k\right)$, $i, j = \overline{1,n}$, $k \in N$, $k \le n$.

<u>Теорема 6.</u> Пусть $B = \alpha I + J$, $\alpha \neq 0$. Тогда $B^{-k} = \left(b_{ij}^k\right)$, где

$$b_{ij}^k = (-1)^{j-i} C_{(k+(j-i)-1)}^{(j-i)} \alpha^{-k-(j-i)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},$$
$$b_{ij}^k = 0,\ i = \overline{1,n},\ j < i. \quad (23)$$

<u>Доказательство.</u> В силу теоремы 5 $b_{1j}^k = \dfrac{f_k^{(j-1)}(\alpha)}{(j-1)!}$, $j = \overline{1,n}$. Из вида функции $f_k(\lambda) = \lambda^{-k}$ найдем, что $f_k^{(j-1)}(\alpha) = (-1)^{j-1} k(k+1)\ldots(k + {}$ ${}+ (j-1)-1)\alpha^{-k-(j-1)}$, $j = \overline{1,n}$. Таким образом,

$$b_{1j}^k = \frac{f_k^{(j-1)}(\alpha)}{(j-1)!} = (-1)^{j-1} \frac{k(k+1)\cdots(k+(j-1)-1)}{(j-1)!} \alpha^{-k-(j-1)} = \alpha^{-k-(j-1)} \times$$

$$\times \frac{(-1)^{j-1}(k+(j-1)-1)!}{(j-1)!(k+(j-1)-1-(j-1))!} = (-1)^{j-1}\frac{(k+(j-1)-1)!}{(j-1)!(k-1)!}\alpha^{-k-(j-1)} =$$

$$=(-1)^{j-1}\alpha^{-k-(j-1)}C_{(k+(j-1)-1)}^{(j-1)},\ j=\overline{1,n}. \qquad (24)$$

Из того, что $b_{ij}^k = b_{1,(j-(i-1))}^k$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, и соотношения (24), получим $b_{ij}^k = b_{1,(j-(i-1))}^k = (-1)^{j-i}C_{(k+(j-i)-1)}^{(j-i)}\alpha^{-k-(j-i)}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Матричное уравнение

$$AX + XA^* = -I, \qquad (25)$$

где $A^T = \alpha_0 I + J$, $\alpha_0 \in C$, $\alpha_0 \neq 0$, имеет единственное решение

$$X = B + J^T BJ + \cdots + J^{(n-1)^T} BJ^{(n-1)}, \qquad (26)$$

$$B = (b_{ij}),\ b_{ij} = (-1)^{i+j-1}C_{(i+j-2)}^{(j-1)}\alpha^{-i-(j-1)}, \qquad (27)$$

$i, j=\overline{1,n}$, $X = X^T > 0$ при $\operatorname{Re}\alpha_0 < 0$, $X = X^T < 0$ при $\operatorname{Re}\alpha_0 > 0$.

Доказательство. Уравнение (25) является частным случаем уравнения (1) при $C=-I$. Согласно теореме 3 решение уравнения (25) имеет вид $X = -IP^{-1} + J^T P^{-2} - J^{2^T} P^{-3} + \cdots + (-1)^n \left(J^{n-1}\right)^T P^{-n}$, где $P = A^T + \overline{\alpha}_0 I = \alpha I + J$, $\alpha = 2\operatorname{Re}\alpha_0$. Таким образом,

$$X = -\left(e_1 \otimes P_{(1)}^{-1} + e_2 \otimes P_{(2)}^{-1} + \cdots + e_n \otimes P_{(n)}^{-1}\right) + \left(e_2 \otimes P_{(1)}^{-2} + e_3 \otimes P_{(2)}^{-2} + \cdots + e_n \otimes \right.$$
$$\left.\otimes P_{(n-1)}^{-2}\right) - \left(e_3 \otimes P_{(1)}^{-3} + e_4 \otimes P_{(2)}^{-3} + \cdots + e_n \otimes P_{(n-2)}^{-3}\right) + \cdots + (-1)^k\left(e_k \otimes P_{(1)}^{-k} + e_{k+1} \otimes P_{(2)}^{-k} + \cdots + \right.$$
$$\left. + e_n \otimes P_{(n-k+1)}^{-k}\right) + \cdots + (-1)^n\left(e_n \otimes P_{(1)}^{-n}\right). \qquad (28)$$

Сгруппируем слагаемые в соотношении (28)

$$X = \left(e_1 \otimes \left(-P_{(1)}^{-1}\right) + e_2 \otimes P_{(1)}^{-2} + e_3 \otimes \left(-P_{(1)}^{-3}\right) + \cdots + e_k \otimes (-1)^k P_{(1)}^{-k} + \cdots + e_n \otimes (-1)^n P_{(1)}^{-n}\right) +$$
$$+ \left(e_2 \otimes \left(-P_{(2)}^{-1}\right) + e_3 \otimes P_{(2)}^{-2} + \cdots + e_n \otimes (-1)^{n-1} P_{(2)}^{-n-1}\right) + \cdots + \left(e_k \otimes \left(-P_{(k)}^{-1}\right) + \right.$$
$$\left. + e_{k+1} \otimes P_{(k)}^{-2} + \cdots + e_n \otimes (-1)^{n-k+1} P_{(k)}^{-n-k+1}\right) + \cdots + e_n \otimes \left(-P_{(n)}^{-1}\right).$$

Обозначим

$$B^T = \left(-P_{(1)}^{-1^T}, P_{(1)}^{-2^T}, (-1)^k P_{(1)}^{-k^T}, (-1)^n P_{(1)}^{-n^T} \right). \tag{29}$$

Рассмотрим вектор-строки $P_{(1)}^{-l} J^k$, $P_{(k+1)}^{-l}$, $l = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n-1}$. Согласно теореме 6 получим

$$P_{(1)}^{-l} J^k = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k}, P_{11}^l, P_{12}^l, \ldots, P_{1,n-k}^l \right), \tag{30}$$

где коэффициенты P_{ij}^l определяются, с одной стороны, соотношениями (23), но, с другой стороны, из теоремы 5 получим

$$P_{(k+1)}^{-l} = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k}, P_{11}^l, P_{12}^l, \ldots, P_{1,n-k}^l \right). \tag{31}$$

Из равенств (30), (31) вытекает

$$P_{(1)}^{-l} J^k = P_{(k+1)}^{-l},\ l = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n-1}. \tag{32}$$

Используя (32) и обозначение для матрицы B, решение уравнения (25) примет вид

$$\begin{aligned} X &= B + \left(e_2 \otimes \left(-P_{(1)}^{-1} J \right) + e_3 \otimes P_{(1)}^{-2} J + \cdots + e_n \otimes (-1)^{n-1} P_{(1)}^{-n-1} J \right) + \cdots + \\ &+ \left(e_k \otimes \left(-P_{(1)}^{-1} J^{k-1} \right) + e_{k+1} \otimes P_{(1)}^{-2} J^{k-1} + \cdots + e_n \otimes (-1)^{n-k+1} P_{(1)}^{-n-k+1} J^{k-1} \right) + \cdots + \\ &+ e_n \otimes \left(-P_{(1)}^{-1} J^{n-1} \right) = B + \left(e_2 \otimes B_{(1)} J + e_3 \otimes B_{(2)} J + \cdots + e_n \otimes B_{(n-1)} J \right) + \ldots + \\ &+ \left(e_k \otimes B_{(1)} J^{k-1} + e_{k+1} \otimes \left(B_{(2)} J^{k-1} \right) + \cdots + e_n \otimes B_{(n-k+1)} J^{k-1} \right) + \cdots + e_n \otimes B_{(1)} \times \\ &\times J^{n-1} = B + \left(e_2 \otimes (BJ)_{(1)} + e_3 \otimes (BJ)_{(2)} + \cdots + e_n \otimes (BJ)_{n-1} \right) + \cdots + \left(e_k \otimes \right. \\ &\otimes \left(BJ^{k-1} \right)_{(1)} + e_{k+1} \otimes \left(BJ^{k-1} \right)_{(2)} + \ldots + e_n \otimes \left. \left(BJ^{k-1} \right)_{(n-k+1)} \right) + \\ &+ \cdots + e_n \otimes \left(BJ^{n-1} \right)_{(1)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Из (33) вытекает

$$X = B + J^T BJ + \cdots + J^{(k-1)^T} BJ^{k-1} + J^{(n-1)^T} BJ^{n-1}. \qquad (34)$$

Определим вид коэффициентов матрицы $B = (b_{ij})$ и ее свойства.

Из соотношения (29) и теоремы 6 следует, что, с одной стороны,

$$b_{ij} = (-1)^i P_{(1),j}^{-i} = (-1)^i (-1)^{j-1} C_{(i+(j-1)-1)}^{(j-1)} \alpha^{-i-(j-1)} =$$
$$= (-1)^{i+j-1} C_{(i+j-2)}^{(j-1)} \alpha^{-i-(j-1)}, \; i, j = \overline{1,n}, \qquad (35)$$

с другой стороны,

$$b_{ji} = (-1)^j P_{(1),i}^{-j} = (-1)^j (-1)^{i-1} C_{(j+(i-1)-1)}^{(i-1)} \alpha^{-j-(i-1)} =$$

$$= (-1)^{i+j-1} C_{(i+j-2)}^{(i-1)} \alpha^{-i-(j-1)}, \; i, j = \overline{1,n}. \qquad (36)$$

Из (35), (36) и свойств сочетаний получим $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$. Таким образом, $B = B^T$, матрица B – симметрическая.

Рассмотрим $(n-1)$-матрицу $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, где $S_1 = S_{1,2} \times \times S_{2,3} \cdots S_{n-1,n}$, $S_2 = S_{2,3} \cdots S_{n-1,n}, \ldots, S_k = S_{k,k+1} \cdots S_{n-1,n}$, $S_{n-1} = S_{n-1,n}$. У матрицы $S_{k,k+1} = (s_{ij})$ элементы $s_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$ $s_{k+1,k} = \alpha^{-1}$, а все остальные элементы равны нулю. Через матрицы D_k обозначим

$$D_k = S_{n-1} \cdots S_{k+1} S_k, \; k = \overline{1, n-1}, \; D_n = I. \qquad (37)$$

Умножение матрицы B слева на матрицу $S_{k,k+1}$ производит добавление к строке с номером $(k+1)$-строки с номером k, умноженной на α^{-1}. Найдем вид строки с номером k матрицы $S_1 B$, $k = \overline{2,n}$. В силу того, что $(S_1 B)_{(k)} = B_{(k-1)} \alpha^{-1} + B_{(k)}$, и с учетом соотношения (35) получим

$$(S_1 B)_{(k),i} = B_{(k),i} + B_{(k-1),i} \alpha^{-1} = (-1)^{k+i-1} C_{(k+i-2)}^{(i-1)} \alpha^{-k-(i-1)} + (-1)^{k-1+i-1} \times$$
$$\times C_{(k-1+i-2)}^{(i-1)} \alpha^{-(k-1)-(i-1)} \alpha^{-1} = (-1)^{k+(i-1)-1} \left(C_{(k+i-3)}^{(i-1)} - C_{(k+i-2)}^{(i-1)} \right) \alpha^{-i-(k-1)} =$$

$$= (-1)^{k+(i-1)-1}\left(\frac{(k+i-3)!}{(i-1)!(k-2)!} - \frac{(k+i-2)!}{(i-1)!(k-1)!}\right)\alpha^{-i-(k-1)} = (-1)^{k+(i-1)-1} \times$$
$$\times \frac{(k+i-3)!}{(i-2)!(k-1)!}\left(-\frac{k+i-2}{i-1} + \frac{k-1}{i-1}\right)\alpha^{-i-(k-1)} = (-1)^{k+(i-1)-1}\frac{(k+i-3)!}{(i-2)!(k-1)!} \times$$
$$\times(-1)\alpha^{-i-(k-1)} = -(-1)^{k+(i-1)-1} C_{(k+i-3)}^{(i-2)}\alpha^{-k-(i-1)} = -B_{(k),i-1}\alpha^{-1},$$
$$k, i = \overline{2, n}, \tag{38}$$

$$(S_1B)_{(k),1} = B_{(k),1} + B_{(k-1),1}\alpha^{-1} = (-1)^k C_{(k-1)}^0 \alpha^{-k} + (-1)^{k-1} C_{(k-2)}^0 \alpha^{-(k-1)} \times$$
$$\times \alpha^{-1} = 0,\ k = \overline{2, n}. \tag{39}$$

Из (38), (39) следует, что

$$(S_1B)_{(k)} = -B_{(k)} J\alpha^{-1},\ k = \overline{2, n}. \tag{40}$$

Используя (40), матрицу S_1B запишем в виде $(S_1B)^T = \Big(-P_{(1)}^{-1^T},$ $-\left(P_{(1)}^{-2} J\alpha^{-1}\right)^T, \ldots, (-1)^{k+1}\left(P_{(1)}^{-k} J\alpha^{-1}\right)^T, \ldots, (-1)^{n+1}\left(P_{(1)}^{-n} J\alpha^{-1}\right)^T \Big)$, которая будет иметь первый поддиагональный столбец, состоящий из нулей. Рассмотрим матрицу $S_2(S_1B)$ и найдем вид строки с номером k матрицы $S_2(S_1B)$, $k = \overline{3, n}$,

$$(S_2(S_1B))_{(k)} = (S_1B)_{(k-1)}\alpha^{-1} + (S_1B)_{(k)} = -B_{(k-1)} J\alpha^{-1}\alpha^{-1} - B_{(k)} J\alpha^{-1} =$$
$$= \left(-J\alpha^{-1}\right)\left(B_{(k-1)}\alpha^{-1} + B_{(k)}\right) = B_{(k)} J\alpha^{-1}\left(J\alpha^{-1}\right) = (-1)^2 B_{(k)} J^2\alpha^{-1} = (-1)^{k+2} \times$$
$$\times P_{(1)}^{-k} J^2 \alpha^{-2},\ k = \overline{3, n}.$$

Матрица $S_2(S_1B)$ имеет два первых поддиагональных столбца, состоящих из нулей. Окончательно получим

$$(D_1B)^T = (S_{n-1}\cdots S_2S_1B)^T = \left(-P_{(1)}^{-1^T}, -\left(P_{(1)}^{-2} J\alpha^{-1}\right)^T, \ldots, (-1)^{2k-1}\left(P_{(1)}^{-k} J^{k-1}\alpha^{-(k-1)}\right)^T, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, (-1)^{2n-1}\left(P_{(1)}^{-n} J^{n-1}\alpha^{-(n-1)}\right)^T \right). \tag{41}$$

Матрица D_1B имеет верхний треугольный вид, и для матрицы D_1 существует D_1^{-1}. Найдем диагональ матрицы D_1B

$$diag(D_1B) = \left(-\alpha^{-1}, -\alpha^{-3}, \ldots, -\alpha^{-2k+1}, \ldots, -\alpha^{-2n+1}\right)^T.$$

Таким образом, $\lambda_k(D_1B) = -\alpha^{-2k+1}$, $k = \overline{1,n}$, – собственные значения матрицы D_1B. Матрица B – симметрическая, следовательно, если $\alpha < 0$, то $B > 0$, если $\alpha > 0$, то $B < 0$. Аналогично соотношению (41) и матрица $D_1BD_1^T$ имеет диагональный вид

$$diag\left(D_1BD_1^T\right) = \left(-\alpha^{-1}, -\alpha^{-3}, \ldots, -\alpha^{-2k+1}, \ldots, -\alpha^{-2n+1}\right).$$

Повторяя для матрицы $D_{k+1}J^{k^T}BJ^kD_{k+1}^T$ рассуждения, проведенные для матрицы $D_1BD_1^T$, получим

$$D_{k+1}J^{k^T}BJ^kD_{k+1}^T = diag\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{k}, -\alpha^{-1}, \ldots, -\alpha^{-2n+2k+1}\right), k = \overline{0, n-1}. \quad (42)$$

Тогда $D_{k+1}J^{k^T}BJ^kD_{k+1}^T \geq 0$ при $\alpha < 0$ и $D_{k+1}J^{k^T}BJ^kD_{k+1}^T \leq 0$ при $\alpha > 0$, $k = \overline{1, n-1}$. Из вида решения X получим, что $X = X^T > 0$ при $\alpha > 0$, $X = X^T < 0$ при $\alpha < 0$. Теорема 7 доказана.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим уравнение (25) при $n = 3$. С помощью соотношений (27) определим элементы матрицы $B = (b_{ij})$, $i, j = \overline{1,3}$, $B_{(1)} = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$, $b_{11} = (-1)^1 \cdot C_0^0 \cdot \alpha^{-1} = -\alpha^{-1}$, $b_{12} = (-1)^2 C_1^1 \alpha^{-2} = \alpha^{-2}$, $b_{13} = (-1)^3 C_2^2 \alpha^{-3} = -\alpha^{-3}$. Получим $B_{(1)} = \left(-\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, -\alpha^{-3}\right)$. Аналогично найдем $B_{(2)}$, $B_{(3)}$: $B_{(2)} = \left(\alpha^{-2}, 2\alpha^{-3}, 3\alpha^{-4}\right)$, $B_{(3)} = \left(-\alpha^{-3}, 3\alpha^{-4}, -6\alpha^{-5}\right)$. Для нахождения решения X необходимо знать матрицу B и матрицы J^TBJ, $J^{2^T}BJ^2$, $\alpha = 2\alpha_0$,

$$B=\begin{pmatrix}-\alpha^{-1} & \alpha^{-2} & -\alpha^{-3}\\ \alpha^{-2} & -2\alpha^{-3} & 3\alpha^{-4}\\ -\alpha^{-3} & 3\alpha^{-4} & -6\alpha^{-5}\end{pmatrix},\ J^T BJ=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-2}\\ 0 & \alpha^{-2} & -2\alpha^{-3}\end{pmatrix},$$

$$J^{2^T} BJ^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha^{-1}\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}\alpha_0 & 1 & 0\\ 0 & \alpha_0 & 1\\ 0 & 0 & \alpha_0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение уравнения (25) имеет вид

$$X=\begin{pmatrix}-\alpha^{-1} & \alpha^{-2} & -\alpha^{-3}\\ \alpha^{-2} & -2\alpha^{-3} & 3\alpha^{-4}\\ -\alpha^{-3} & 3\alpha^{-4} & -6\alpha^{-5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-2}\\ 0 & \alpha^{-2} & -2\alpha^{-3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha^{-1}\end{pmatrix}.$$

Теорема 8. Матричное уравнение

$$AX+XA^*=L, \tag{43}$$

где $A^T=\alpha_0 I+J$, $\alpha_0\in C$, $\alpha_0\neq 0$, $L=diag(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, имеет единственное решение

$$X=-\left(\varepsilon_1 B+\varepsilon_2 J^T BJ+\cdots+\varepsilon_n J^{(n-1)^T} BJ^{n-1}\right) \tag{44}$$

и элементы матрицы B определяются соотношениями (35).

Доказательство. Уравнение (43) является частным случаем уравнения (1) при $C=L$. Согласно теореме 3 решение уравнения (43) имеет вид

$$X=LP^{-1}-J^T LP^{-2}+\cdots+(-1)^{n+1}\left(J^{n-1}\right)^T LP^{-n}, \tag{45}$$

где $P=A^T+\overline{\alpha}_0 I=\alpha I+J$, $\alpha=2\operatorname{Re}\alpha_0$. Аналогично теореме 7 в силу (45) получим

$$X=\left(\varepsilon_1 e_1\otimes P_{(1)}^{-1}+\varepsilon_2 e_2\otimes P_{(2)}^{-1}+\ldots+\varepsilon_n e_n\otimes P_{(n)}^{-1}\right)-\left(\varepsilon_1 e_2\otimes P_{(1)}^{-2}+\varepsilon_2 e_3\otimes P_{(2)}^{-2}+\right.$$

$$\ldots+\varepsilon_{n-1}e_n\otimes P_{(n-1)}^{-2}\Big)+\ldots+\ (-1)^{k+1}\Big(\varepsilon_1 e_k\otimes P_{(1)}^{-k}+\varepsilon_2 e_{k+1}\otimes P_2^{-k}+\cdots+\ \varepsilon_{n-k+1}\times$$
$$\times e_n\otimes P_{(n-k+1)}^{-k}\Big)+\ldots+(-1)^{n+1}\Big(\varepsilon_1 e_n\otimes P_{(1)}^{-n}\Big)=\ -\Big(\ \varepsilon_1 B+\varepsilon_2 J^T BJ+\cdots+J^{(n-1)^T}\ \times$$
$$\times\varepsilon_n BJ^{\,n-1}\Big).$$

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Пусть $A^T=\alpha_0 I+J$, $\alpha_0\neq 0$, $C=diag(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, $E=colon(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, $DE=-\Big(\varepsilon_1 Bq+\varepsilon_2 J^T BJq+\ldots+\varepsilon_n\Big(J^{(n-1)}\Big)^T BJ^{(n-1)}\times$ $\times q\Big)$, $E=D^{-1}r$, элементы матрицы B определяются соотношениями (35). Тогда решение уравнений (1), (11) определяется соотношением (44).

Доказательство теоремы 9 следует из того, что решение уравнения (1) определяется соотношением (44) и $Xq=DE=r$.

Рассмотрим уравнение (1), когда матрица A вещественная и имеет пару кратных собственных значений с действительными частями, отличными от нуля. Будем рассматривать матрицу $A_{2n}^T\in R^{2n\times 2n}$, имеющую вид $A_{2n}^T=I_n\otimes B_2+J_n\otimes I_2$, где $I_n, J_n\in R^{n\times n}$, $B_2, I_2\in R^{2\times 2}$ $B_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$, то есть матрица A_{2n}^T имеет кратные собственные значения $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Матрица A_{2n}^T имеет собственные значения $\lambda\Big(A_{2n}^T\Big)=\lambda_i(J_n)+\lambda_j(B_2)\neq 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=1,2$ при $\alpha\neq 0$. В силу теоремы 1 уравнение (1) имеет единственное решение вида (9), для нахождения которого необходимо знать матрицу $H=\Big(A_{2n}^T\otimes I_{2n}+I_{2n}\otimes A_{2n}^T\Big)^{-1}$. Найдем H:

$$H=\Big(A_{2n}^T\otimes I_{2n}\ +I_{2n}\otimes A_{2n}^T\Big)^{-1}=(J_n\otimes I_2\otimes I_{2n}\ +\ I_n\otimes B_2\otimes I_{2n}+\ I_{2n}\otimes J_n\otimes$$
$$\otimes I_2\ +I_{2n}\otimes I_n\otimes B_2)^{-1}=\big(I_n\otimes(B_2\otimes I_{2n}\ +\ I_2\otimes J_n\otimes I_2\ +\ I_2\otimes I_n\otimes B_2)\ +$$
$$+J_n\otimes I_{4n}\big)^{-1}=\big(I_n\otimes(B_2\otimes I_{2n}+\ I_2\otimes(J_n\otimes I_2+I_n\otimes B_2))\ +\ J_n\otimes I_{4n}\big)^{-1}=$$
$$=(I_n\otimes(B_2\otimes I_{2n}+I_2\otimes A_{2n}^T)+J_n\otimes I_{4n})^{-1}=(I_n\otimes P_{4n}+J_n\otimes I_{4n})^{-1},\quad (46)$$

где $P_{4n}=B_2\otimes I_{2n}+I_2\otimes A_{2n}^T$. Аналогично соотношению (19)

$$H=I_n\otimes P_{4n}^{-1}-J_n\otimes P_{4n}^{-2}+\cdots+(-1)^{n+1}J_n^{n-1}\otimes P_{4n}^{-n}.\quad (47)$$

В силу (9), (47) решение уравнения (1) получим в виде

$$X = \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes I_{2n} \otimes C_{2n}\right)\left(I_{2n} \otimes H_{4n^2}\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) = \left(I_{2n} \otimes \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes I_{2n} \otimes C_{2n}\right)\left(I_{2n} \otimes I_n \otimes P_{4n}^{-1}\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) - \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes \otimes I_{2n} \otimes C_{2n}\right)\left(I_{2n} \otimes J_n \otimes P_{4n}^{-2}\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right) \times \times \left(I_{2n} \otimes I_{2n} \otimes C_{2n}\right)\left(I_{2n} \otimes J_n^{n-1} \otimes P_{4n}^{-n}\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) = \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes \otimes \left(I_{2n} \otimes C_{2n}\right)\left(I_n \otimes P_{4n}^{-1}\right)\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) - \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes \left(I_{2n} \otimes C_{2n}\right) \times \times \left(J_n \otimes P_{4n}^{-2}\right)\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes \left(I_{2n} \otimes C_{2n}\right) \times \times \left(J_n^{n-1} \otimes P_{4n}^{-n}\right)\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right). \qquad (48)$$

Матрица P_{4n}^{-1} имеет блочную структуру $P_{4n}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha I_{2n} + A_{2n}^T & \beta I_{2n} \\ -\beta I_{2n} & \alpha I_{2n} + A_{2n}^T \end{pmatrix}^{-1}$.

Пользуясь формулой Фробениуса для блочных матриц [9] и вводя обозначение $G_{2n} = \alpha I_{2n} + A_{2n}^T$, получим

$$P_{4n}^{-1} = \begin{pmatrix} G_{2n} & \beta I_{2n} \\ -\beta I_{2n} & G_{2n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1} G_{2n} & -\beta\left(I_{2n}\beta^2 + G_{2n}^2\right)^{-1} \\ \beta\left(I_{2n}\beta^2 + G_{2n}^2\right)^{-1} & \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1} G_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{2n} & -\beta I_{2n} \\ \beta I_{2n} & G_{2n} \end{pmatrix} = \left(I_2 \otimes \left(G_{2n}^2 + I_{2n} \times \times \beta^2\right)^{-1}\right)\begin{pmatrix} G_{2n} & -\beta I_{2n} \\ \beta I_{2n} & G_{2n} \end{pmatrix} = \left(I_2 \otimes \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1}\right) Y_{4n}. \qquad (49)$$

Матрицу Y_{4n} можно представить в виде суммы двумя способами

$$Y_{4n} = B_2^T \otimes I_{2n} + I_2 \otimes A_{2n}^T, \qquad (50)$$

$$Y_{4n} = I_2 \otimes G_{2n} + K_2 \otimes \beta I_{2n}, \qquad (51)$$

где $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим $V_{2n} = \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1} G_{2n}$, $M_{2n} = \Big(G_{2n}^2 + I_{2n} \times$ $\times \beta^2\Big)^{-1}$, $N_{2n} = \beta\left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1}$, $T_{2n} = M_{2n} A_{2n}^T$. Тогда в силу (49), (50), (51) матрицу P_{4n}^{-1} можно представить в виде суммы двух матриц

$$P_{4n}^{-1} = I_2 \otimes V_{2n} + K_2 \otimes N_{2n}, \tag{52}$$

$$P_{4n}^{-1} = B_2^T \otimes M_{2n} + I_2 \otimes T_{2n}. \tag{53}$$

Для матрицы P_{4n}^{-n} получим соотношения

$$P_{4n}^{-n} = \left(I_2 \otimes V_{2n} + K_2 \otimes N_{2n}\right)^n, \tag{54}$$

$$P_{4n}^{-n} = \left(B_2^T \otimes M_{2n} + I_2 \otimes T_{2n}\right)^n. \tag{55}$$

В силу (48), (54), (3) решение уравнения (1) примет вид

$$\begin{aligned}
X = & \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\!\left(I_{2n} \otimes (I_{2n} \otimes C_{2n})(I_n \otimes (I_2 \otimes V_{2n} + K_2 \otimes N_{2n}))\right)\!([I_{2n}] \otimes \\
& \otimes I_{2n}) - \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right) \otimes \left(I_{2n} \otimes (I_{2n} \otimes C_{2n})\left(J_n \otimes (I_2 \otimes V_{2n} + K_2 \otimes N_{2n})^2\right)\right) \times \\
& \times ([I_{2n}] \otimes I_{2n}) + \cdots + (-1)^{n+1}\left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\!\left(I_{2n} \otimes (I_{2n} \otimes C_{2n})\left(J_n^{n-1} \otimes (I_2 \otimes \right.\right. \\
& \left.\left. \otimes V_{2n} + K_2 \otimes N_{2n})^n\right)\right)([I_{2n}] \otimes I_{2n}) = \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\!\left(I_{2n} \otimes (I_{2n} \otimes C_{2n})(I_{2n} \otimes \right. \\
& \otimes V_{2n} + (I_n \otimes K_2) \otimes N_{2n})\big)(I_{2n} \otimes [I_{2n}]) - \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\!\left(I_{2n} \otimes (I_{2n} \otimes C_{2n}) \times \right. \\
& \times \left((J_n \otimes I_2) \otimes V_{2n}^2 + (J_n \otimes K_2) \otimes V_{2n} N_{2n} + (J_n \otimes K_2) \otimes N_{2n} V_{2n} + \left(J_n \otimes K_2^2\right) \otimes \right. \\
& \left.\left. \otimes N_{2n}^2\right)\right)([I_{2n}] \otimes I_{2n}) + \cdots + (-1)^{n+1}\left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\!\left(I_{2n} \otimes (I_{2n} \otimes C_{2n})\left(\left(J_n^{n-1} \otimes I_2\right) \otimes \right.\right. \\
& \left.\left. \otimes V_{2n}^n + \cdots + \left(J_n^{n-1} \otimes K_2^n\right) \otimes N_{2n}^n\right)\right)([I_{2n}] \otimes I_{2n}) = C_{2n} V_{2n} + (I_n \otimes K_2)^T C_{2n} \times \\
& \times N_{2n} - (J_n \otimes I_2)^T C_{2n} V_{2n}^2 - (J_n \otimes K_2)^T C_{2n} V_{2n} N_{2n} - (J_n \otimes K_2)^T C_{2n} \times \\
& \times N_{2n} V_{2n} - \left(J_n \otimes K_2^2\right)^T C_{2n} N_{2n}^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\left(\left(J_n^{n-1} \otimes I_2\right)^T C_{2n} V_{2n}^n + \ldots + \right. \\
& \left. + \left(J_n^{n-1} \otimes K_2^n\right) C_{2n} N_{2n}^n\right).
\end{aligned} \tag{56}$$

Аналогично (56) в силу (48), (55), (3) решение уравнения (1) можно записать в виде

$$X = \left(I_n \otimes B_2\right) C_{2n} M_{2n} + C_{2n} T_{2n} - \left(J_n \otimes B_2^{2^T}\right)^T C_{2n} M_{2n}^2 - \left(J_n \otimes B_2^T\right)^T C_{2n} M_{2n} \times$$

$$\times T_{2n} - \left(J_n \otimes B_2^T\right)^T C_{2n} T_{2n} M_{2n} - \left(J_n \otimes I_2\right)^T C_{2n} T_{2n}^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \Bigl(\Bigl(J_n^{n-1} \otimes$$

$$\otimes B_2^{n^T}\Bigr)^T C_{2n} M_{2n}^n + \cdots + \left(J_n^{n-1} \otimes I_2\right)^T C_{2n} T_{2n}^n \Bigr). \tag{57}$$

Таким образом, доказана теорема 10.

Теорема 10. Уравнение (1) с матрицей $A_{2n}^T = \left(I_n \otimes B_2 + J_n \otimes I\right)$, $B_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, имеет единственное решение вида (56) или (57), где $G_{2n} = \alpha I_{2n} + A_{2n}^T$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V_{2n} = \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1} G_{2n}$, $N_{2n} = \beta\Bigl(G_{2n}^2 + {}$ ${}+ I_{2n}\beta^2\Bigr)^{-1}$, $M_{2n} = \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2\right)^{-1}$, $T_{2n} = M_{2n} \cdot A_{2n}^T$.

Теорема 11. Уравнение (1) с матрицей $A_{2n}^T = I_n \otimes B_2$, $B_2 = \; = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, имеет единственное решение

$$X = \frac{1}{4\alpha} C_{2n} + \frac{1}{4\alpha\left(\alpha^2 + \beta^2\right)} \left(I_n \otimes B_2\right) C_{2n} \left(I_n \otimes B_2^T\right).$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A_{2n}^T = I_n \otimes B_2$. Из (46) получим $H = \left(A_{2n}^T \otimes I_{2n} + I_{2n} \otimes A_{2n}^T\right)^{-1} = \bigl(I_n \otimes B_2 \otimes$ $\otimes I_{2n} + I_{2n} \otimes I_n \otimes B_2\bigr)^{-1} = \left(I_n \otimes P_{4n}\right)^{-1} = I_n \otimes P_{4n}^{-1}$, где $P_{4n} = \bigl(B_2 \otimes I_{2n} +$ $+ I_{2n} \otimes B_2\bigr)$. Матрица P_{4n} имеет блочную структуру

$$P_{4n} = \begin{pmatrix} \alpha I_{2n} + I_n \otimes B_2 & \beta I_{2n} \\ -\beta I_{2n} & \alpha I_{2n} + I_n \otimes B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{2n} & \beta I_{2n} \\ -\beta I_{2n} & G_{2n} \end{pmatrix},$$

где $G_{2n} = \alpha I_{2n} + I_n \otimes B_2$. Используя формулу Фробениуса обращения блочных матриц, получим

$$P_{4n}^{-1} = \begin{pmatrix} G_{2n} & \beta I_{2n} \\ -\beta I_{2n} & G_{2n} \end{pmatrix}^{-1} = \left(I_2 \otimes \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2 \right)^{-1} \right) \begin{pmatrix} G_{2n} & -\beta I_{2n} \\ \beta I_{2n} & G_{2n} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(I_2 \otimes \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2 \right)^{-1} \right) Y_{4n}. \qquad (58)$$

Матрицу Y_{4n} представим в виде суммы

$$Y_{4n} = B_2^T \otimes I_{2n} + I_{2n} \otimes B_2. \qquad (59)$$

Используя (59), найдем P_{4n}^{-1}

$$P_{4n}^{-1} = B_2^T \otimes M_{2n} + I_2 \otimes \left(M_{2n} \left(I_n \otimes B_2 \right) \right), \qquad (60)$$

где

$$M_{2n} = \left(G_{2n}^2 + I_{2n}\beta^2 \right)^{-1} = \left(I_n \otimes (\alpha I_2 + B_2)^2 + I_n \otimes I_2 \beta^2 \right)^{-1} = I_n \otimes$$

$$\otimes \left(I_2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \right) + 2\alpha B_2 + B_2^2 \right)^{-1} = I_n \otimes V_2, \qquad (61)$$

матрица $V_2 = \left(I_2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \right) + 2\alpha B_2 + B_2^2 \right)^{-1}$. Из (9), (60), (3) найдем решение уравнения (1)

$$X = \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T \right) \left(I_{2n} \otimes I_{2n} \otimes C_{2n} \right) \left(I_{2n} \otimes I_n \otimes P_{4n}^{-1} \right) \left([I_{2n}] \otimes I_{2n} \right) = \left(I_{2n} \otimes \right.$$

$$\left. \otimes [I_{2n}]^T \right) \left(I_{2n} \otimes I_{2n} \otimes C_{2n} \right) \left(I_{2n} \otimes I_n \otimes \left(B_2^T \otimes I_n \otimes V_2 + I_2 \otimes I_n \otimes V_2 B_2 \right) \right) \times$$

$$\times \left([I_{2n}] \otimes I_{2n} \right) = \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T \right) \left(I_{2n} \otimes \left(I_{2n} \otimes C_{2n} \right) \left(I_n \otimes B_2^T \otimes I_n \otimes V_2 \right) \right) \left([I_{2n}] \otimes \right.$$

$$\left. \otimes I_{2n} \right) + \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T \right) \left(I_{2n} \otimes \left(I_{2n} \otimes C_{2n} \right) \left(I_n \otimes I_2 \otimes I_n \otimes V_2 B_2 \right) \right) \left([I_{2n}] \otimes \right.$$

$$\left. \otimes I_{2n} \right) = \left(I_n \otimes B_2^T \right)^T C_{2n} \left(I_n \otimes V_2 \right) + C_{2n} \left(I_n \otimes V_2 B_2 \right). \qquad (62)$$

Используя вид матрицы B_2, получим

$$V_2^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta & 2\alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta & \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 4\alpha\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = 4\alpha B_2\,, V_2 = \frac{1}{4\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}B_2^T\,,\ V_2B_2 = \frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{4\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}I_2\,.$$

В силу (62) найдем решение X :

$$X = \frac{1}{4\alpha}\cdot C_{2n} + \frac{1}{4\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(I_n\otimes B_2\right)C_{2n}\left(I_n\otimes B_2^T\right). \qquad (63)$$

Если $C_{2n} = C_{2n}^T$, то из (63) следует, что $X = X^T$. Теорема 11 доказана.

Пример 2. В силу теоремы 11 решение уравнения (1) с матрицей $A_{2n}^T = I_n\otimes B_2$ имеет вид (63). Если $C_{2n} = -I_{2n}$, то получим

$$X = -\frac{1}{4\alpha}I_{2n} - \frac{1}{4\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(I_n\otimes B_2\right)\left(I_n\otimes B_2^T\right) = -\frac{1}{4\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(I_n\otimes\right.$$
$$\left.\otimes B_2B_2^T\right) - \frac{1}{4\alpha}I_{2n} = -\frac{1}{4\alpha}I_{2n} - \frac{1}{4\alpha}I_{2n} = -\frac{1}{2\alpha}I_{2n}\,.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $C_2 = diag\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$, обозначим $\Delta = \alpha^2+\beta^2$. Тогда

$$X = \frac{1}{4\alpha\Delta}\begin{pmatrix} \varepsilon_1\left(\alpha^2+\Delta\right)+\varepsilon_2\beta^2 & \alpha\beta\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) \\ \alpha\beta\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) & \varepsilon_2\left(\alpha^2+\Delta\right)+\varepsilon_1\beta^2 \end{pmatrix}.$$

При $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $\alpha = \beta$ получим

$$X = \frac{\varepsilon_1}{4\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ SXS^T = \frac{\varepsilon_1}{4\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_1}{4\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$SC_2S^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \le 0$$

при $\varepsilon_1 < 0$, $SB_2S^{-1} = \ = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 2\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 2\alpha & 0 \end{pmatrix}X + X\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

имеет решение $X = \frac{\varepsilon_1}{4\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, имеющее одно отрицательное и одно положительное собственное значение.

Теорема 12. Пусть матрица $A = diag(A_1, A_2, \dots A_n)$, $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$,

$e_i = colon\left(\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{i}, 0, \dots 0\right) \in R^n$, $E_i = e_i \otimes e_i^T \in R^{n \times n}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_i =$ $= \alpha_i I_{2n} + A_{2n}^T$, $V_i = \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1} G_i$, $N_i = \beta_i \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда решение уравнения (1) будет иметь вид

$$X = \sum_{i=1}^{n} (E_i \otimes I_2) C V_i + \sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes K_2^T\right) C N_i \,. \tag{64}$$

Пусть $Q = \sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes I_2 \otimes (V_i q)^T + E_i \otimes K_2^T \otimes (N_i q)^T\right)$, $QQ^+ r = r$,

$$C = \left(I_{2n} \otimes \left(Q^+ r + Y - Q^+ QY\right)^T \right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right), \tag{65}$$

$Y -$ произвольный вектор. Тогда решение уравнений (1), (11) имеет вид (64), матрица C определяется соотношением (65).

Доказательство. Используя условие теоремы $A = diag(A_1, A_2, \dots,$ $A^* = A^T$, найдем матрицу $H_{4n^2} = \left(A_{2n}^T \otimes I_{2n} + I_{2n} \otimes A_{2n}^T\right)^{-1}$:

$$H_{4n^2} = E_1 \otimes \left(A_1 \otimes I_{2n} + I_2 \otimes A_{2n}^T\right)^{-1} + E_2 \otimes \left(A_2 \otimes I_{2n} + I_2 \otimes A_{2n}^T\right)^{-1} + \dots +$$
$$+ E_2 \otimes \left(A_n \otimes I_{2n} + I_2 \otimes A_{2n}^T\right)^{-1}. \tag{66}$$

Обозначим $B_i = \left(A_i \otimes I_{2n} + I_2 \otimes A_{2n}^T\right)^{-1}$, $G_i = \alpha_i I_{2n} + A_{2n}^T$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Используя соотношения (49), (51), найдем матрицу B_i

$$B_i = \left(I_2 \otimes \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1} \right)\left(I_2 \otimes G_i + K_2 \otimes \beta_i I_{2n}\right) = I_2 \otimes \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1} G_i +$$

$$+K_2 \otimes \beta_i \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1}, \; i = \overline{1, n}. \tag{67}$$

Пусть $V_i = \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1} G_i$, $N_i = \beta_i \left(G_i^2 + \beta_i^2 I_{2n}\right)^{-1}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда в силу соотношений (66), (67) получим, что $B_i = I_2 \otimes V_i + K_2 \otimes N_i$, матрица H_{4n^2} имеет вид

$$H_{4n^2} = \sum_{i=1}^{n} E_i \otimes I_2 \otimes V_i + \sum_{i=1}^{n} E_i \otimes K_2 \otimes N_i . \tag{68}$$

Соотношения (9), (68), (2), (3) позволяют найти решение уравнения (1):

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{2n} \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes \left(I_{2n} \otimes C\right)\left(E_i \otimes I_2 \otimes V_i\right)\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(I_{2n} \otimes \right.$$
$$\left. \otimes [I_{2n}]^T\right)\left(I_{2n} \otimes \left(I_{2n} \otimes C\right)\left(E_i \otimes K_2 \otimes N_i\right)\right)\left([I_{2n}] \otimes I_{2n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes I_2\right)^T C V_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes K_2^T\right) C N_i .$$

Подставив решение X в уравнение (11), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes I_2\right) C V_i q + \sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes K_2^T\right) C N_i q = r . \tag{69}$$

Используя соотношение (3), получим, что уравнение (69) эквивалентно уравнению

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes I_2 \otimes \left(V_i q\right)^T + E_i \otimes K_2^T \otimes \left(N_i q\right)^T\right)\right)[C] = r . \tag{70}$$

Обозначим $Q = \sum_{i=1}^{n} \left(E_i \otimes I_2 \otimes \left(V_i q\right)^T + E_i \otimes K_2^T \otimes \left(N_i q\right)^T\right)$. Для того чтобы уравнение (70) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы $QQ^+ r = r$. При этом решение $[C]$ имеет вид

$$[C] = Q^+ r + Y - Q^+ Q Y , \tag{71}$$

где Y – произвольный вектор. Применяя (3) к соотношению (71), найдем вид матрицы $C = \left(I_{2n} \otimes \left(Q^{+}r + Y - Q^{+}QY \right)^{T} \right) \left([I_{2n}] \otimes I_{2n} \right)$. Теорема 12 доказана.

---

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М. : Наука, 1969. 368 с. ; Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 552 с. ; Гелиг А.Х., Леонов Г.А. , Якубович В.А. Устойчивость систем с неединственным состоянием равновесия. М. : Наука, 1978. 400 с. ; Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М. : Наука, 1984. 192 с. ; Ланкастер П. Теория матриц. М. : Наука, 1978. 280 с. ; Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М. : Наука, 1975. 400 с. ; Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. : Наука, 1972. 232 с. ; Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М. : Мир, 1983. 576 с. ; Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М. : Наука, 1996. 304 с. ; Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 655 с.
2. Ланкастер П. Теория матриц.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.
4. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.
5. Гелиг А.Х., Леонов Г.А. , Якубович В.А. Устойчивость систем с неединственным состоянием равновесия.
6. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.
7. Там же.
8. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман, Р. Введение в теорию матриц. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
3. Гелиг, А.Х. Устойчивость систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
4. Икрамов, Х.Д. Численное решение матричных уравнений. – М. : Наука, 1984. – 192 с.
5. Ланкастер, П. Теория матриц. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
6. Мальцев, А.И. Основы линейной алгебры. – М. : Наука, 1975. – 400 с.
7. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М. : Наука, 1972. – 232 с.
8. Маршалл, А. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения / А. Маршалл, И. Олкин. – М. : Мир, 1983. – 576 с.
9. Прасолов, В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. – М. : Наука, 1996. – 304 с.
10. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

АННОТАЦИИ И КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

A.P. Liferov

Transformation of the traditional higher education in the post-industrial society.

The author suggests ways and forms of Russian and foreign universities' transformation exploring their cases and experiences so that they match the objectives of contributing to the making of post-industrial society and a shaping global labour market. The article gives the outline of possible cooperation scenarios between traditional universities and swiftly developing educational business structures.

cognitive competencies, corporate training, interdisciplinary programs, non-cognitive competencies, transformation of the traditional Higher School.

L.K. Grebenkina, N.A. Kopylova

Conceptual ideas of pedagogics of cooperation as the basis for pedagogical collaboration between university teachers and students

The article gives the basis of pedagogics of cooperation as one of the modern humanistic trends in the pedagogical science. It reveals principles, methodological approaches and conceptual ideas, ways and means of its realization in higher institutions. The article also systematizes the results of the attempts of realizing the principles and ideas of pedagogics of cooperation at pedagogical courses and at the lessons of English in Ryazan State University.

pedagogics of cooperation, cooperation, collaboration, co-authorship, human and personal approach, humanization, educational specialist and innovator, collective creativity.

L.N. Vdovina

Ryazan region in M.K. Lubavskiy's biography. – the historian and the rector of Moscow University (on the occasion of the 150 anniversary of Lubavskiy M.K.)

The paper is focused on little-known facts from the life of academician M.K. Lubavskiy, who was a native of Ryazan province, an outstanding Russian historian, the rector of Moscow University. The author examines a wide scope of material and shows that the period of studies at Ryazan Theological Seminary and the surroundings determined the future scientist's choice of life trajectory to a great extent.

historian, M.K. Lubavskiy, Ryazan region, Ryazan theological seminary, V.O.Kluchevskiy, Moscow University.

I.N. Grebenkin

The Supreme Commander's Headquarters and the Confrontation of the Political Powers in 1914–1916

The research paper is devoted to the role of the Supreme military command of the Russian Imperial army in the political life of the country during World War I. The research is focused on the problem of interaction between the Supreme Commander's Headquarters and Russian state government institutions. Political aspects of the Headquarters leaders' functioning, their contacts and relations with different political powers' representatives have been considered. Political preferences and dispositions of the military commanders and their relevance for the political struggle on the eve of the revolution of 1917.

world War I, the Supreme Commander's Headquarters, state government, State Duma, political powers, political struggle.

K.V. Alekseev

The beginning of Russian social-political novel and its development at the middle of the 19th century

The article focuses on the beginning of Russian social-political novel and its development at the beginning of the 19th century. It also treats the development of the main kinds of this genre (a novel of «modern people» and an «antinihilistic novel») and the reasons for their antagonism. Special attention is given to a brief analysis of the novels , which belong the aforementioned genre and were written at the 60s at the beginning of the 70s of the 19th century.

Russian social-political novel, novel of «modern people», «antinihilistic novel», revolutionary democrats, liberal views.

S.N. Motorin

Compositional peculiarities of the plays by A. Vampilov

The article describes the dramatic art of A. Vampilov. Special attention is paid to the composition of the plays by this author: both external and internal. A correlation is drawn between the formal organization of some works and their ideological and artistic content in general, which makes it possible to view the creative quest of this playwright as a special phenomenon – «Vampilov's theatre». In the context of these problems the following plays are analyzed: «A Farewell in June», «The Eldest Son», «Provincial Anecdotes», «Duck Hunting», «Last Summer in Chulimsk». The article is addressed to the teachers of the Russian literature and students majoring in philology.

dramatic art, play, composition, artistic image, hero, personage, character, dramatic action, architectonics, system of images, Vampilov's theatre.

E.Kh. Naziev, A.Kh. Naziev, G.I. Keleynikova

On homogeneous linear differential systems with constant coefficients and full problem of eugenvalues

In this paper we consider homogeneous linear differential systems with constant coefficients. Usually, one solves such systems by reducing to the so called full problem of eugenvalues. This problem is very complicated. So, we try doing without that. Usual order is this: 1) eugenvalues, 2) eugenvectors. We go in opposite direction.

homogeneous linear system of differential equations with constant coefficients, full problem of eugenvalues, homogeneous linear group, infinitesimal operator, one-parametric subgroup.

S.S. Mamonov

Solving of matrix equations

In this paper we consider matrix equations and give for them criteria of solvability. About matrix equations see bibliography to [1].

matrix equations, direct product, positively definite solutions of matrix equations.

СВЕДЕНИИ ОБ АВТОРАХ

Алексеев Кирилл Васильевич – кандидат филологических наук, доцент кафедры литературы Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Вдовина Людмила Николаевна – кандидат исторических наук, доцент исторического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Гребенкина Лидия Константиновна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой педагогических технологий Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Гребенкин Игорь Николаевич – кандидат исторических наук, старший научный сотрудник кафедры Отечественной истории Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина, grin17.66@mail.ru

Келейникова Галина Ивановна – математик ЧП «Фирма Личность-Интеллект-Компьютер», г. Киев.

Копылова Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры педагогических технологий Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Лиферов Анатолий Петрович – доктор педагогических наук, профессор, академик РАО, президент Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Мамонов Сергей Станиславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Моторин Сергей Николаевич – кандидат филологических наук, доцент кафедры литературы Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Назиев Асланбек Хамидович – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.

Назиев Эльберт Хамидович – кандидат физико-математических наук, доцент, г. Киев.

ИНФОРМАЦИЯ АВТОРАМ

Рукописи представляются в редакцию в одном экземпляре объемом не более 1,5 авторского листа (формат А4, 36 страниц машинописного текста через два интервала). Статья должна быть напечатана четким шрифтом на белой бумаге с одной стороны листа с соблюдением изложенных требований.

Используемая литература, на которую в тексте даются ссылки, помещается в конце статьи с соблюдением ГОСТа 71–2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила сотавления». Для книг должны быть указаны: автор, название работы, место издания, издательство, год издания, страницы, а в тексте – порядковый номер данной книги, соответствующий ее номеру в списке литературы; для статьи: автор, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (или выпуск), страницы начала и конца статьи.

Ссылки на цитаты обязательны. Для подтверждения правильности приводимых цитат в тексте на полях страниц, напротив цитат, автору следует ставить свою подпись.

Примечания и список используемой или рекомендуемой литературы должны быть затекстовыми.

Ссылки на неопубликованные работы (за исключением диссертаций) не допускаются.

В конце статьи авторы должны сообщить о себе следующие сведения: фамилию, имя, отчество, почтовый адрес, телефон (служебный и домашний), факс, адрес электронной почты (E-mail), место работы, занимаемую должность, ученое звание или статус.

Статья должна быть подписана всеми авторами.

Для ускорения процесса подготовки журнала к изданию редакция просит авторов по мере возможности вместе со статьей на бумажном носителе присылать на дискете электронную копию статьи с текстовым и графическим файлами редакторов, в которых была набрана статья.

Требования к электронным версиям издательских оригиналов:

– электронная версия должна быть записана на дискете (гибком магнитном диске) 3,5 или CD-R(RW)-диске емкостью 650 Mb или 700 Mb;

– текст должен быть сохранен в формате RTF (Rich Text Format);

– изображения и прочие графические данные должны быть записаны в формате TIF (Tag Image Fail Format) с разрешением от 400 * 400 до 600 * 600 dpi;

– архив электронной версии может быть представлен в одном из следующих форматов: *.ZIP, *.RAR.

– Текст, набранный в формате *.RTF, должен соответствовать следующим требованиям:

– выключка по левому краю без отступов и абзацных втяжек;

– полиграфические (парные) кавычки: («) – Alt 0171, («) – Alt 0187;

– знаки препинания тире (Alt 0151) и дефис должны различаться по начертанию;

– многоточие должно быть обозначено одним символом (Alt 0133);

– буква *е* употребляется для различения смысла и в собственных наименованиях и т.п.

Оригиналы для сканирования (фотографии, графические изображения) должны быть качественными.

Файлы, которые при проверке показывают наличие вирусов или подозрение на вирусы, не принимаются.

В случае отклонения материала рукописи и дискеты не возвращаются.

Для заметок

Научное издание

Вестник
Рязанского
государственного
университета
имени С.А. Есенина

2009
№ 1

Научный журнал

Главный редактор *Лиферов Анатолий Петрович*

Редактор *Т.Н. Свитнева*
Технический редактор *О.С. Арефьева*

Подписано в печать 03.03.09. Поз. № 126. Бумага офсетная. Формат 70x100 $^{1}/_{16}$
Гарнитура Times New Roman. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 10,2. Уч.-изд. л. 11,61. Тираж 1000 экз. Заказ №

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46

Отпечатано в редакционно-издательском центре РГУ имени С.А. Есенина
390023, г. Рязань, ул. Урицкого, 22